به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱/ پیش دانشگاهی تجربی/دبیرستان امام خمینی(ره) /سال تحصیلی ۹۳–۹۲

فصل اول

احتمال

$(probablity)$

آزمایش: در علم احتمال، به هر عملی که برای جمع آوری داده ها صورت می پذیرد، آزمایش می گوییم.

آزمایش تصادفی:

آزمایشی که نتایج آن از قبل قابل پیش بینی نباشد ولی مجموعه ی نتایج حاصل از آزمایش قابل پیش بینی باشد را آزمایش تصادفی می گوییم.

مثال: وقتی یک سکه را پرتاب می کنیم از قبل نمی توانیم نتیجه بگیریم که روی سکه یا پشت سکه خواهد آمد، ولی مجموعه نتایج حاصل از پرتاب سکه قابل پیش بینی است. این مجموعه عبارت است از $\{$ پشت سکه , روی سکه $\}$

فضای نمونه ای:

مجموعه ی تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه ای** آن آزمایش می گوییم و آن را با S نشان می دهیم.

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید. مطلوبست فضای نمونه ای. $\mathbf{S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}}$

مثال: خانواده ای دارای ۲ فرزند است. فضای نمونه ای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

حل: اگر پسر بودن را با b و دختر بودن g را با نشان دهیم، در این صورت داریم: $S = \{bb\ , b\mathrm{g}\ , \mathrm{g}b\ , \mathrm{gg}\}$

مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

حل: اگر روی سکه را با R و پشت را با P نشان دهیم داریم:

$$S = \{(R, ۱), (R, ۲), (R, ۳), (R, ۴), (R, ۵), (R, ۶), (P, ۱), (P, ۲), (P, ۳), (P, ۴), (P, ۵), (P, ۶), \}$$

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گوییم.

پیشامدها را معمولاً با حروف A و B و C و... نشان می دهیم.

مثال: خانواده ای دارای سه فرزند است.

الف) فضای نمونه ای را بنویسید.

ب) پیشامدی را بنویسید که در آن حداقل ۲ فرزند این خانواده پسر باشد.

ج) پیشامدی را بنویسید که در آن هر سه فرزند دارای یک جنسیت باشند.

حل:

الف) $S = \{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(b,g,g),(g,b,b),(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}$

ب) $A = \{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b)\}$

ج) $B = \{(b,b,b),(g,g,g)\}$

مثال: در کیسه ای ۳ مهره ی سفید، ۴ مهره ی سیاه و ۵ مهره ی قرمز قرار دارد. از این کیسه ۲ مهره به تصادف و همزمان خارج می کنیم. مطلوبست: الف) فضای نمونه ای. ب) پیشامد آن که هر دو مهره سیاه باشد. ج) یکی از مهره ها سفید و مهره ی دیگر قرمز باشد. د) هر دو مهره همرنگ باشند.

یادآوری: تعریف ترکیب:

ترکیب های k تایی از n شی متمایز، به انتخاب های k تایی از آن n شی اطلاق می شود که در آن ها ترتیب فاقد اهمیت است.

ترکیب های k تایی از n شی متمایز را با $\binom{n}{k}$ یا $C(n,k)$ (بخوانید انتخاب k از n) نمایش می دهیم.

تعداد ترکیب های k تایی از n شی را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

حل: الف)

نکته: در بسیاری از موارد نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه ای به صورت فهرست وار، کاری وقت گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی از مهره ها که می توان آنها را از یک سبد حاوی ۱۲ مهره خارج کرد. با استفاده از آنالیز ترکیبی که در ریاضی ۲ خوانده ایم، می دانیم که تعداد این ترکیبیات از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$n(\mathrm{S})=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲!}{(۱۲-۲)!\,۲!}=\frac{۱۲!}{۱۰!\,۲!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰!}{۱۰!\times ۲\times ۱}=۶۶$$

ب)

$$\mathbf{A}=\{b_۱b_۲,b_۱b_۳,b_۲b_۳,\dots\}\ \Rightarrow n(\mathrm{A})=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{(۴-۲)!\,۲!}=\frac{۴!}{۲!\,۲!}=\frac{۴\times ۳\times ۲!}{۲!\,۲!}=۶$$

ج)

نکته: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «و» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه به دست می آوریم و در هم ضرب می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

$$\mathbf{B}=\{w_۱r_۲,w_۱r_۳,w_۲r_۳,\dots\}\ \Rightarrow n(\mathrm{B})=\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۳\times ۵=۱۵$$

د) همرنگ بودن دو مهره به معنای آن است که یا هر دو مهره سفید یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند.

نکته: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «یا» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه به دست می آوریم و با هم جمع می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

تذکر: چنین نیست که همواره در صورت سوال کلمه ی «یا» ذکر شده باشد. بلکه گاها باید با دقت در مفهوم سوال این نکته را متوجه شویم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{هر دو مهره سفید}: \binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{(۳-۲)!\,۲!} = \frac{۳!}{۱!\,۲!} = ۳ \\ \text{هر دو مهره سیاه}: \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{(۴-۲)!\,۲!} = \frac{۴!}{۲!\,۲!} = ۶ \\ \text{هر دو مهره قرمز}: \binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{(۵-۲)!\,۲!} = \frac{۵!}{۳!\,۲!} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow n(\mathrm{C}) = \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} + \binom{۵}{۲} = ۳ + ۶ + ۱۰ = ۱۹$$

تعریف احتمال: اگر S فضای نمونه ای یک آزمایش و A یک پیشامد از فضای نمونه ای باشد، آن گاه احتمال وقوع پیشامد A را با $\mathrm{P}(\mathrm{A})$نشان داده و از رابطه ی زیر آن را به دست می آوریم:

$$\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})}$$

برای حل مسائل احتمال، ابتدای فضای نمونه ای آزمایش مطرح شده و اندازه ی آن را به دست می آوریم. سپس پیشامدی که احتمال وقوع آن در صورت سوال از ما خواسته شده را (پیشامد مطلوب) در صورت امکان نوشته و اندازه ی آن را به دست می آوریم و در آخر از رابطه ی $\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})}$ احتمال قوع پیشامد را به دست می آوریم.

مثال: سه سکه را با هم پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) هر سه سکه پشت بیاید. ب) فقط یکی از سکه ها رو بیاید. ج) حداکثر یکی از سکه ها رو بیاید.

حل: همان طور که گفته شد ابتدا فضای نمونه ای آزمایش و اندازه ی آن را مشخص می کنیم.

$$\mathrm{S} = \{(R,R,R),(R,R,P),(R,P,R),(R,P,P),(P,R,R),(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\} \Rightarrow n(\mathbf{S}) = ۸$$

الف) حال پیشامد مطلوب گزینه ی الف را استخراج می کنیم. $\mathrm{A} = \{(P,P,P)\} \Rightarrow n(\mathrm{A}) = ۱ \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})} = \frac{۱}{۸}$

ب) پیشامد مطلوب قسمت **ب:**

$$B = \{(R, P, P), (P, R, P), (P, P, R)\} \Rightarrow n(B) = ۳ \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

ج) پیشامد مطلوب قسمت **ج:**

$$C = \{(R, P, P), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\} \Rightarrow n(C) = ۴ \Rightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

مثال: مادری دارای ۳ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که: الف) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. ب) دو فرزند آخر پسر باشد.

حل: همان طور که گفته شد ابتدا فضای نمونه ای آزمایش و اندازه ی آن را مشخص می کنیم.

$$S = \{(b, b, b), (b, b, g), (b, g, b), (b, g, g), (g, b, b), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\} \Rightarrow n(S) = ۸$$

الف) حال پیشامد مطلوب گزینه ی الف و اندازه ی آن را استخراج می کنیم.

$$A = \{(b, g, g), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب) پیشامد مطلوب قسمت **ب:**

$$B = \{(b, b, b), (g, b, b)\} \Rightarrow n(B) = ۲ \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

مثال: از جعبه ای که شامل پنج مهره ی سفید و سه مهره ی سیاه است، دو مهره با هم به تصادف خارج می کنیم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد چه قدر است؟

حل: با استفاده از آنالیز ترکیبی اندازه ی فضای نمونه ای را محاسبه می کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی شامل مهره های سیاه و سفید که می توان آن ها را از یک جعبه ی حاوی ۸ مهره خارج کرد. در نتیجه:

$$n(\mathrm{S})=\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{(۸-۲)!\,۲!}=\frac{۸!}{۶!\,۲!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!\,۲!}=۲۸$$

حال اندازه ی پیشامد مطلوب یعنی آن که هر دو مهره سفید باشند را حساب می کنیم.

$$n(\mathrm{A})=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!\,۲!}=\frac{۵!}{۳!\,۲!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\,۲!}=۱۰\Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A})=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})}=\frac{۱۰}{۲۸}$$

تست: در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟ کنکور سراسری تجربی سال ۸۱

الف) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ب) $\frac{۵}{۱۴}$ ج) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۱۵}{۲۸}$

حل: با استفاده از آنالیز ترکیبی اندازه ی فضای نمونه ای را محاسبه می کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی شامل موش های سالم و دیابتی که می توانند از یک آزمایشگاه که شامل ۸ موش است، فرار کنند. در نتیجه:

$$n(\mathrm{S})=\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{(۸-۲)!\,۲!}=\frac{۸!}{۶!\,۲!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!\,۲!}=۲۸$$

حال اندازه ی پیشامد مطلوب یعنی آن که فقط یکی از موش های فراری دیابتی باشد، یعنی یکی دیابتی و دیگر موش فراری سالم است را حساب می کنیم.

$$n(\mathrm{A})=\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=\frac{۳!}{۲!\,۱!}\times\frac{۵!}{۴!\,۱!}=۳\times۵=۱۵\Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A})=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

ترکیب پیشامدها

می دانیم هر پیشامد زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای است. پس هر پیشامد را می توان به عنوان یک مجموعه در نظر گرفت.

بنابراین اعمالی مانند متمم یک مجموعه، اجتماع یا اشتراک بین مجموعه ها نیز روی پیشامد قابل تعریف است.

الف) متمم یک پیشامد:

اگر A پیشامدی از فضای نمونه ای $(\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S})$ باشد، آن گاه متمم آن پیشامدی است که در آن A رخ ندهد.

متمم A را با نمادهای A' یا A^{C} یا $\overline{\mathrm{A}}$ نمایش می دهیم و داریم:

$$\begin{cases} \mathrm{p}(\mathrm{A}') = ۱ - \mathrm{p}(\mathrm{A}) \\ \\ \mathrm{p}(\mathrm{A}) = ۱ - \mathrm{p}(\mathrm{A}') \end{cases} \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A}) + \mathrm{p}(\mathrm{A}') = ۱$$

تست: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال این که عدد رو شده یکسان نباشد کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $\frac{۵}{۶}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۱}{۶}$

حل: Aرا پیشامدی در نظر می گیریم که اعداد رو شده یکسان باشند. طبق تعریف A' پیشامدی است که اعداد رو شده یکسان نیست.

چون محاسبه ی $\mathrm{p}(\mathrm{A})$ ساده تر است، ابتدا آن را محاسبه کرده و سپس با استفاده از متمم پیشامد $\mathrm{p}(\mathrm{A}')$ را به دست می آوریم.

$$\mathrm{A} = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)\} \Rightarrow n(\mathrm{A}) = ۶ \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A}') = ۱ - \mathrm{p}(\mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A}') = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

پاسخ صحیح گزینه ی **ب** می باشد.

تست: در یک کیسه ۵ مهره ی سفید و ۷ مهره ی سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می کنیم. احتمال اینکه این دو مهره همرنگ نباشند کدام است؟ کنکور سراسری ریاضی سال ۸۴

الف) $\frac{۶}{۱۱}$ ب) $\frac{۱۹}{۳۳}$ ج) $\frac{۳۵}{۶۶}$ د) $\frac{۳۷}{۶۶}$

حل: از پیشامد متمم استفاده می کنیم. متمم دو مهره همرنگ نباشد عبارت است از «دو مهره همرنگ باشند». دو مهره همرنگ باشند یعنی هر دو مهره سفید یا هر دو سیاه باشند.

$$\left.\begin{array}{l} n(\mathrm{S}) = \binom{۱۲}{۲} = ۶۶ \\ \mathrm{A} \text{ :همرنگ بودن دو مهره} \Rightarrow n(\mathrm{A}) = \binom{۵}{۲} + \binom{۷}{۲} = ۱۰ + ۲۱ = ۳۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{p(A)} = \frac{۳۱}{۶۶} \Rightarrow \mathrm{p(A')} = ۱ - \mathrm{p(A)} = ۱ - \frac{۳۱}{۶۶} = \frac{۳۵}{۶۶}$$

پاسخ صحیح گزینه ی «ج» می باشد.

ب) اجتماع دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، اجتماع آن ها را به صورت $\mathrm{A \cup B}$ نشان می دهیم.

پیشامد $\mathrm{A \cup B}$ وقتی اتفاق می افتد که حداقل یکی از آن ها یعنی A یا B اتفاق بیفتد. مانند آن چه که در مورد مجموعه ها داشتیم، اعضای پیشامد $\mathrm{A \cup B}$ یا در A وجود دارند یا در B و یا در هر دو آن ها. طبق تعریف احتمال داریم:

$$\boxed{\mathrm{p(A \cup B)} = \frac{n(\mathrm{A \cup B})}{n(\mathrm{S})}}$$

تذکر: هرگاه بین دو پیشامد از لفظ «یا» استفاده شود، به معنای اجتماع دو پیشامد است.

تذکر: اگر حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق افتاده باشد، بدان معنی است که $\mathrm{A \cup B}$ اتفاق افتاده است.

ج) اشتراک دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، اشتراک آن ها را به صورت $A \cap B$ نشان می دهیم.

پیشامد $A \cap B$ وقتی اتفاق می افتد که A و B هر دو اتفاق بیفتند. اعضای پیشامد $A \cap B$ هم در A وجود دارند و هم در B.

طبق تعریف احتمال داریم:

$$\boxed{p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}}$$

تذکر: هرگاه بین دو پیشامد از لفظ «و» استفاده شود، به معنای اشتراک دو پیشامد است.

نکته: قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند در این صورت:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

د) پیشامد غیرممکن:

اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را غیرممکن می گوییم و آن را با نماد $\emptyset$ نشان می دهیم. و چون مجموعه ی تهی عضوی ندارد پس:

$$p(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} \xRightarrow{n(\emptyset)=۰} p(\emptyset) = \frac{۰}{n(S)} = ۰$$

ه) پیشامد حتمی:

می دانیم هر مجموعه، زیر مجموعه ی خودش است. پس اگر S پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد در این صورت:

$$p(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$$

مثال: کیسه ای حاوی ۵ مهره ی سفید است. مهره ای را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

$$p(A = S) = \frac{n(A = S)}{n(S)} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

مثال: از بین اعداد $S = \{۱,۲,۳, \dots ,۲۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست محاسبه ی احتمال اینکه:

الف) عدد انتخابی زوج یا مضرب ۵ باشد.　　　　ب) عدد انتخابی اول و فرد باشد.

حل الف: اگر A پیشامد زوج بودن عدد و B پیشامد مضرب ۵ بودن عدد انتخابی باشد، داریم:

$$A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\}$$

$$B = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}$$

برای محاسبه ی احتمال خواسته شده، می توانیم از دو روش استفاده کنیم.

روش اول: مستقیما و با استفاده از تعریف، احتمال خواسته شده را حساب می کنیم.

$$A \cup B = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰,۵, ۱۵\} \Rightarrow n(A \cup B) = ۱۲ \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

روش دوم: از فرمول روبرو استفاده کنیم.　$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۲۰}$$

$$B = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰\} \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۲۰}$$

$$A \cap B = \{۱۰,۲۰\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۲}{۲۰}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{۱۰}{۲۰} + \frac{۴}{۲۰} - \frac{۲}{۲۰} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

حل ب: اگر A پیشامد اول بودن عدد و B پیشامد فرد بودن عدد انتخابی باشد، داریم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\} \\ &\mathrm{B} = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\} \end{aligned} \xRightarrow{\text{اول و فرد}} \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\} \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\mathrm{S})} = \frac{۷}{۲۰}$$

مثال: در یک مدرسه ۲۰٪ دانش آموزان در کلاس فیزیک و ۳۰٪ در کلاس ریاضی و ۱۵٪ در هر دو کلاس ثبت نام کرده اند. مشخص کنید چند درصد این دانش آموزان در کلاس فیزیک یا کلاس ریاضی ثبت نام کرده اند؟

حل: اگر A را پیشامد ثبت نام در کلاس فیزیک و B را پیشامد ثبت نام در کلاس ریاضی در نظر بگیریم داریم:

ثبت نام در کلاس فیزیک **یا** ریاضی

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{p}(\mathrm{A}) = ۲۰\% = ۰/۲ \\ &\mathrm{p}(\mathrm{B}) = ۳۰\% = ۰/۳ \\ &\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ۱۵\% = ۰/۱۵ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{p}(\boxed{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = \mathrm{p}(\mathrm{A}) + \mathrm{p}(\mathrm{B}) - \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = ۰/۲ + ۰/۳ - ۰/۱۵$$

$$= ۰/۵ - ۰/۱۵ = ۰/۳۵$$

مثال: اگر $\mathrm{p}(\mathrm{A}) = ۰/۳$ و $\mathrm{p}(\mathrm{B}') = ۰/۴$ و $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = ۰/۸$ آن گاه $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ را بیابید.

حل:

$$\mathrm{p}(\mathrm{B}) = ۱ - \mathrm{p}(\mathrm{B}') \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{B}) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{p}(\mathrm{A}) + \mathrm{p}(\mathrm{B}) - \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{p}(\mathrm{A}) + \mathrm{p}(\mathrm{B}) - \mathrm{p}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

$$\Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ۰/۳ + ۰/۶ - ۰/۸ = ۰/۹ - ۰/۸ = ۰/۱$$

مثال: فرض کنید در جامعه ای درصد گروه های خونی به شرح زیر باشد:
فردی به تصادف از این جامعه انتخاب می شود. احتمال این را بیابید که:
الف) این فرد دارای گروه خونی A یا O باشد.
ب) این فرد دارای گروه خونی B نباشد.

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد	٪۳۸	٪۱۲	٪۲۷	٪۲۳

حل: الف) اگر پیشامد X را نوع گروه خونی A و پیشامد Y را نوع گروه خونی O در نظر بگیریم در این صورت باید $p(X \cup Y)$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$$

اما در مورد $X \cap Y$ باید گفت که امکان ندارد که گروه خونی فردی هم A و هم O باشد. پس: $p(X \cap Y) = ۰$ و داریم:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) = ۰/۳۸ + ۰/۲۷ = ۰/۶۵$$

ب) اگر پیشامد Z را نوع گروه خونی B در نظر بگیریم، باید $p(Z')$ را محاسبه کنیم:

$$p(Z') = ۱ - p(Z) = ۱ - ۰/۱۲ = ۰/۸۸$$

و) پیشامدهای ناسازگار:

مقدمه: در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامد A را فرد بودن عدد رو شده و پیشامد B را زوج بودن عدد رو شده در نظر بگیرید.
سوال این است که آیا این دو **پیشامد** می توانند با هم رخ دهند؟ یعنی آیا امکان دارد عدد رو شده هم فرد باشد و هم زوج؟
چنین چیزی امکان ندارد. یعنی می توانیم بگوییم پیشامد $A \cap B$ هیچ وقت اتفاق نمی افتد.

تعریف: اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند، آن دو پیشامد را **ناسازگار** می گوییم. پس A و B دو پیشامد ناسازگارند، اگر داشته باشیم: $A \cap B = \emptyset$

بنابراین اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $p(A \cap B) = ۰$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

این تعریف را می توانیم برای تعداد بیشتری از پیشامدها نیز به صورت زیر بیان کنیم:

اگر $A_1, A_2, \dots$ و A_n پیشامدهایی باشند که دو به دو نتوانند با هم رخ دهند، می گوییم این پیشامدها دو به دو ناسازگارند.
(یعنی هر دو تا از این مجموعه ها را در نظر بگیرید، اشتراک آن ها تهی است.) در این صورت داریم:

$$\boxed{p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)}$$

مثلا فرض کنید درون جعبه ای ۵ مهره ی آبی، ۳ مهره ی سفید، ۴ مهره ی سبز و ۸ مهره ی سیاه باشد. از این جعبه یک مهره به تصادف بر می داریم.

پیشامد A را آبی بودن، B را سفید بودن، C را سبز بودن مهره ی انتخابی در نظر می گیریم.

در این صورت **احتمال** اینکه مهره ی انتخاب شده، آبی یا سفید یا سبز باشد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{۵}{۲۰} + \frac{۳}{۲۰} + \frac{۴}{۲۰} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

(زیرا پیشامدهای A ، B و C دو به دو ناسازگارند. یعنی مثلا امکان ندارد که یک مهره هم زمان آبی و سبز باشد و ...)

ز) پیشامدهای مستقل:

مقدمه: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. آیا ۶ آمدن تاس اول تاثیری بر روی ۶ آمدن تاس دوم دارد؟

تعریف: اگر دو پیشامد به گونه ای باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد، می گوییم دو پیشامد مستقل از هم هستند.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند در این صورت داریم:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A).p(B)}$$

در مثال پرتاب دو تاس، نتیجه ی پرتاب تاس اول تاثیری بر نتیجه ی پرتاب تاس دوم ندارد. پس اگر A پیشامد ۶ آمدن تاس اول و B پیشامد ۶ آمدن تاس دوم باشد، احتمال اینکه هر دو تاس ۶ بیاید(یعنی احتمال وقوع پیشامد $A \cap B$، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=\frac{۱}{۶} \\ p(B)=\frac{۱}{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B)=p(A).p(B) \Rightarrow p(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

مثال: مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟

حل: پیشامد A را پسر بودن فرزند اول و پیشامد B را پسر بودن فرزند دوم در نظر می گیریم. این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند.

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=\frac{۱}{۲} \\ p(B)=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B)=p(A).p(B) \Rightarrow p(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

مثال: در مثال بالا مطلوب است احتمال آن که **فقط** دو فرزند اول پسر باشند.

حل: فقط پسر بودن دو فرزند اول یعنی: فرزند اول و فرزند دوم پسر و فرزند سوم دختر باشد که این سه پیشامد مستقل از یکدیگرند.

پیشامد A را پسر بودن فرزند اول و پیشامد B را پسر بودن فرزند دوم و پیشامد C را دختر بودن فرزند سوم در نظر می گیریم. بنا به استقلال پیشامدها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=\frac{۱}{۲} \\ p(B)=\frac{۱}{۲} \\ p(C)=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B\cap C)=p(A).p(B).p(C) \Rightarrow p(A\cap B\cap C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

نکته: برای آن که فردی دارای RH منفی باشد، لازم است که هر دو ژن منفی داشته باشد. یعنی:

$$p(\text{منفی RH}) = p(\text{هر دو ژن منفی}) = p(\text{یک ژن منفی}).p(\text{یک ژن منفی})$$

مثال: مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰٪ ژن های تعیین کننده ی عامل RH خونی منفی اند. مطلوبست احتمال آن که الف) فردی دارای RH منفی باشد. ب) در خانواده ای با سه فرزند، اولین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد.

حل: الف) می دانیم برای آن که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن ها را از هر یک از والدین خود به ارث می برد می توانیم منفی بودن هر یک از این ژن ها را مستقل فرض کنیم بنابراین:

$$p(\text{منفی RH}) = p(\text{هر دو ژن منفی}) = p(\text{یک ژن منفی}).p(\text{یک ژن منفی}) = ۰/۴ \times ۰/۴ = ۰/۱۶$$

ب) یعنی RH فرزند اول و فرزند دوم مثبت و RH فرزند سوم منفی باشد.

$$p(\text{فرزند سوم منفی RH}) = p(\text{اولی مثبت RH}).p(\text{دومی مثبت RH}).p(\text{سومی منفی RH})$$

$$= (۱-۰/۴)(۱-۰/۴)(۰/۴) = ۰/۶ \times ۰/۶ \times ۰/۴ = ۰/۱۴۴$$

مثال: احتمال این که احمد در یک امتحان قبول شود $\frac{۱}{۳}$ و احتمال این که حسن در همان امتحان قبول شود $\frac{۱}{۵}$ است. مطلوب است احتمال آن که احمد یا حسن در این امتحان قبول شوند؟

حل: پیشامد قبول شدن احمد در امتحان را با A و پیشامد قبول شدن حسن در امتحان را با B نمایش می دهیم. این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A).p(B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۵+۳-۱}{۱۵}$$

$$= \frac{۱}{۱۵}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناتهی باشند، آیا امکان دارد که این دو پیشامد مستقل و ناسازگار باشند؟ چرا؟

حل: خیر. چنین چیزی امکان ندارد. یعنی امکان ندارد دو پیشامد ناتهی همزمان مستقل و ناسازگار باشند.

فرض کنیم دو پیشامد ناتهی A و B مستقل باشند. در این صورت طبق تعریف دو پیشامد مستقل داریم:

$$p(A \cap B) = p(A).\,p(B)$$

اما چون دو پیشامد A و B ناتهی هستند پس $p(A) \neq ۰, p(B) \neq ۰$ و در نتیجه: $p(A).\,p(B) \neq ۰$ و داریم:

$$p(A \cap B) \neq ۰$$

از $p(A \cap B) \neq ۰$ نتیجه می گیریم که $A \cap B \neq \emptyset$. در نتیجه A و B نمی توانند ناسازگار باشند.

برعکس: فرض کنیم دو پیشامد ناتهی A و B ناسازگار باشند. بنابراین طبق خاصیت دو پیشامد ناسازگار داریم: $p(A \cap B) = ۰$

اما چون A و B ناتهی اند، $p(A)$ و $p(B)$ و در نتیجه حاصل ضرب آن ها نیز مخالف صفر است. یعنی: $p(A).\,p(B) \neq ۰$

بنابراین $p(A \cap B) \neq p(A).\,p(B)$ و در نتیجه A و B نمی توانند مستقل باشند.

تا به حال برای پیشامدی مانند A، $p(A)$ را با استفاده از دستور $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می کردیم. منظور از این احتمال آن بود که ما هیچ اطلاعی از قبل که در وقوع پیشامد A موثر باشد نداریم. امّا در بعضی مواقع ممکن است که به ما اطلاعاتی داده باشند که این اطلاعات در احتمال وقوع A موثر باشد.

مثال: فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، مهره ای به تصادف خارج کرده ایم، احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

حل: در این مثال فضای نمونه ای ۹ عضو دارد که ۵ عضو آن برای پیشامد مورد نظر مساعد است. پس احتمال آمدن سفید برابر $\frac{5}{9}$ است.

این احتمال به طور مطلق حساب شد و از هیچ اطلاع اضافی استفاده نشد. حال مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: از جعبه ی مثال بالا مهره ای خارج می کنیم ملاحظه می شود که رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهره ی دوم را به تصادف خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که این مهره سفید باشد.

حل: در این مثال پس از کشیدن مهره ی اول و با توجه به اطلاعات داده شده (سیاه بودن مهره ی خارج شده) شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۵ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه در جعبه، پس احتمال آمدن یک مهره ی سفید از این جعبه $\frac{5}{8}$ است.

هما نطوری که ملاحظه می شود اگر چه در دو مثال بالا احتمال آمدن مهره ی سفید از یک جعبه را حساب کردیم ولی جواب ها یکسان نیستند. زیرا در مثال دوم اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهره ی سفید را تغییر می دهد.

احتمال شرطی: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند و $p(B) > 0$ در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B قبلا رخ داده باشد را به صورت $p(A|B)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

نتیجه: احتمال وقوع پیشامد B به شرط اینکه بدانیم پیشامد A قبلا رخ داده باشد را به صورت $p(B|A)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

مثال: اگر $p(A \cap B) = ۰/۲$ و $p(B) = ۰/۶$ آن گاه $p(A|B)$ را حساب کنید.

حل:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A|B) = \frac{۰/۲}{۰/۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم، قبلاً یک موش سفید را برای آزمایشی انتخاب کرده ایم. حال می خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش هایی که روی آن ها آزمایش انجام نشده است انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

حل: با توجه به شرایط مسأله، در واقع موشی از بین ۳ موش سیاه و یک موش سفید انتخاب می شود. پس احتمال سفید بودن این موش عبارت است از $\frac{۱}{۴}$.

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها:

قبلا گفتیم که اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، وقوع یکی بر وقوع دیگری تاثیری نمی گذارد. این مطلب را می توانیم با توجه به تعریف احتمال شرطی، به صورت زیر ثابت کنیم.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \xrightarrow[p(A \cap B) = p(A).p(B)]{\text{A و B مستقل هستند}} p(A|B) = \frac{p(A).p(B)}{p(B)} \Rightarrow p(A|B) = p(A)$$

پس احتمال این که پیشامد A اتفاق بیفتد به شرط رخ دادن پیشامد B ، با احتمال A برابر است. یعنی وقوع پیشامد B تاثیری روی وقوع پیشامد A نداشته است. پس می توانیم نتیجه بگیریم که اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند داریم:

$$p(B|A) = p(B) \qquad\qquad p(A|B) = p(A)$$

قاعده ی ضرب احتمال: (محاسبه ی احتمال اشتراک دو پیشامد با استفاده از احتمال شرطی)

از قاعده ی احتمال شرطی می توانیم $p(A \cap B)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B)$$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$$

از این دستورها نیز می توانیم احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کنیم.

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۴ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول سفید و مهره ی دوم سیاه باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سیاه بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$ اما:

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۶ مهره ی سیاه و ۳ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۱۵}$$

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۶ مهره ی سفید و ۸ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول سفید و مهره ی دوم سیاه باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سیاه بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$ اما:

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{۶}{۱۴} = \frac{۳}{۷}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۸ مهره ی سیاه و ۵ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{۸}{۱۳} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۸}{۱۳} = \frac{۲۴}{۹۱}$$

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول و مهره ی دوم سفید باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سفید بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$ اما:

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{۵}{۱۱}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۶ مهره ی سیاه و ۴ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{۵}{۱۱} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۱۱}$$

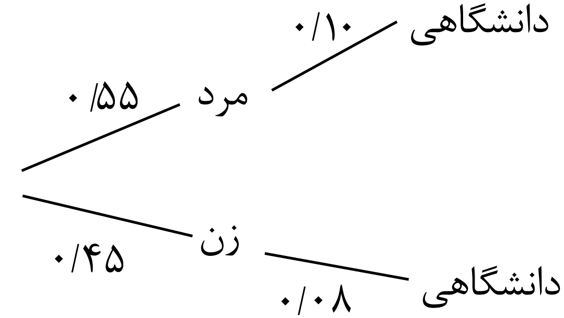
قانون احتمال کل:

اگر فضای نمونه ای $(\mathbf{S})$ را به n قسمت $A_۱, A_۲, A_۳, \dots, A_n$ افراز کنیم (یعنی اولا به ازای هر $۱ \le i \le n$ داشته باشیم: $A_i \neq \emptyset$ ثانیا به ازای هر i و j که $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ و ثالثا $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n = \mathbf{S}$) در این صورت:

$$\boxed{p(A) = p(A_۱)p(A|A_۱) + p(A_۲)p(A|A_۲) + \cdots + p(A_n)p(A|A_n) \Rightarrow} \; p(A) = \sum_{i=۱}^{n} p(A_i)p(A|A_i)$$

مثال: ۴۵ ٪ جمعیت کشوری را زنان و ۵۵٪ بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۱۰ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

حل:

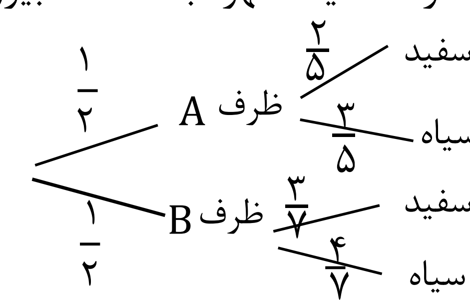


$$p(\text{دارا بودن تحصیلات}) = p(\text{مرد بودن})p(\text{دارا بودن تحصیلات}|\text{مرد بودن})$$
$$+p(\text{زن بودن})p(\text{دارا بودن تحصیلات}|\text{زن بودن})$$
$$= \frac{۵۵}{۱۰۰} \times \frac{۱۰}{۱۰۰} + \frac{۴۵}{۱۰۰} \times \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۵۵۰ + ۳۶۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۹۱۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۹۱}{۱۰۰۰}$$

مثال: ظرف A شامل ۲ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه و ظرف B شامل ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه است.

از یکی از ظرف ها یک مهره به تصادف بیرون می آوریم. احتمال این که این مهره سیاه باشد چه قدر است؟

حل:



$$p(\text{سیاه بودن}) = p(\text{ظرف } A).p(\text{سیاه}|\text{ظرف } A) + p(\text{ظرف } B).p(\text{سیاه}|\text{ظرف } B)$$
$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۲}{۷} = \frac{۴۱}{۷۰}$$

مثال: سه ظرف هم شکل و یکسان داریم. در ظرف اول ۲ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه، در ظرف دوم ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره ی سفید و ۲ مهره ی سیاه وجود دارد. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج می کنیم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

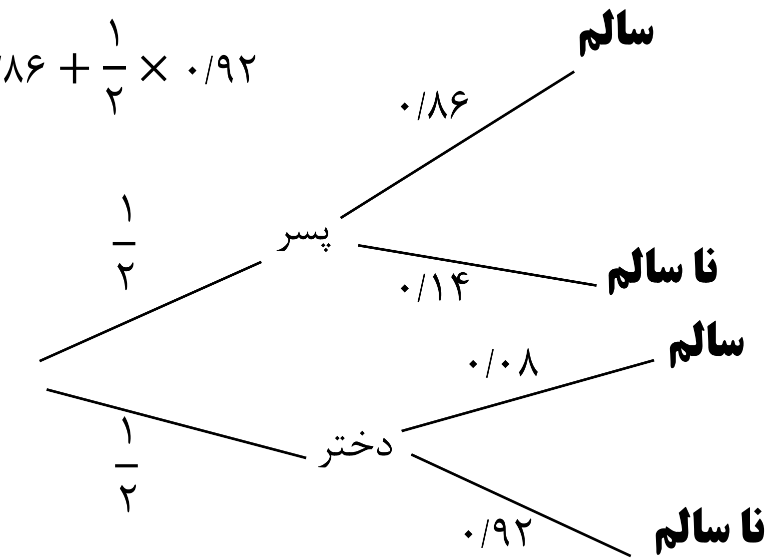
حل:

$$p(\text{سفید بودن}) = p(\text{ظرف اول}).p(\text{سفید}|\text{ظرف اول}) + p(\text{ظرف دوم}).p(\text{سفید}|\text{ظرف دوم}) + p(\text{ظرف سوم}).p(\text{سفید}|\text{ظرف سوم})$$
$$= \frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۱۵}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}=\frac{۲۱+۴۵+۳۵}{۳۱۵}=\frac{۱۰۱}{۳۱۵}$$

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۴ و به فرزند دختر ۰/۰۸ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال اینکه فرزند سالم باشد.

حل:

$$p(\text{سالم بودن}) = p(\text{پسر})p(\text{سالم بودن}|\text{پسر}) + p(\text{دختر})p(\text{سالم بودن}|\text{دختر})$$
$$= \frac{۱}{۲}\times(۱-۰/۱۴)+\frac{۱}{۲}\times(۱-۰/۰۸)=\frac{۱}{۲}\times ۰/۸۶+\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۲$$
$$= \frac{۰/۸۶+۰/۹۲}{۲}=\frac{۱/۷۸}{۲}$$



متغیر تصادفی: تابعی است از فضای نمونه ای $(\mathbf{S})$ به اعداد حقیقی $(\mathbf{R})$. به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است که دامنه ی آن فضای نمونه ای و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد.

متغیر تصادفی(با توجه به تعریفی که از آن ارائه می شود) به هر عضو از فضای نمونه ای، یک عدد حقیقی را نسبت می دهد.

متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ مانند X و Y و ... نمایش می دهیم. بنابراین با توجه به تعریف داریم: $\mathbf{X}: \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{R}$

نکته: برد متغیر تصادفی یا اعدادی که متغیر تصادفی می تواند اختیار کند، با توجه به فضای نمونه ای و تعریفی که از متغیر تصادفی ارائه می شود، مشخص می شود.

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر متغیر تصادفی X را تعداد فرزندان دختر این خانواده در نظر بگیریم، برد X چه اعدادی را می تواند اختیار کند؟

حل: فضای نمونه ای عبارت است از: $\mathrm{S} = \{(\text{د, د}), (\text{د, پ}), (\text{پ, د}), (\text{پ, پ})\}$

طبق تعریف، متغیر تصادفی این مثال به صورت $\mathbf{X}: \{(\text{د, د}), (\text{د, پ}), (\text{پ, د}), (\text{پ, پ})\} \longrightarrow \mathbf{R}$ با ضابطه های زیر می باشد:

$\mathrm{X}(\text{د, د}) = ۲$	$\mathrm{X}(\text{د, پ}) = \mathrm{X}(\text{پ, د}) = ۱$	$\mathrm{X}(\text{پ, پ}) = ۰$

بنابراین برد متغیر تصادفی X اعداد ۰، ۱ و ۲ را می تواند اختیار کند.

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد دفعاتی که سکه رو آمده باشد، در این صورت برد متغیر تصادفی X چه اعدادی را می تواند اختیار کند؟

حل: فضای نمونه ای عبارت است از:

$$\mathrm{S} = \{(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{P}), (\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{R}), (\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{R}), (\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P})\}$$

طبق تعریف، متغیر تصادفی این مثال به صورت

$$\mathbf{X}: \{(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{P}), (\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{R}), (\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{R}), (\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P})\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

با ضابطه های زیر می باشد:

$\mathrm{X}(\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{R}) = ۱$	$\mathrm{X}(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{R}) = \mathrm{X}(\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{R}) = ۲$	$\mathrm{X}(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}) = ۳$
		$\mathrm{X}(\mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P}) = ۰$

تابع توزیع احتمال (یا تابع احتمال):

تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی مانند $\mathbf{X}$، تابعی است که به هر یک از مقادیری که برد $\mathbf{X}$ (x_i ها) می تواند اختیار کند، احتمال $\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)=\mathrm{p}_i$ یا $\mathrm{p}(x_i)$ را نسبت می دهد.(در واقع تابع توزیع احتمال، تابعی است از برد متغیر تصادفی به $[۰,۱]$)

تابع توزیع احتمال گاهی با ضابطه و گاهی با جدول مشخص می شود. اگر تابع توزیع احتمال را با جدول مشخص کنیم، آن را جدول توزیع احتمال می گوییم که شکل کلی آن به صورت زیر است:

x_i	$x_۱$	$x_۲$	$\cdots$	x_n
$\mathbf{p}(x_i)$	$\mathbf{p}(x_۱)$	$\mathbf{p}(x_۲)$	$\cdots$	$\mathbf{p}(x_n)$

در هر جدول توزیع احتمال باید دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) برای هر i ، $۰ \le \mathrm{p}(x_i) \le ۱$

ب) $\mathrm{p}(x_۱)+\mathrm{p}(x_۲)+\cdots+\mathrm{p}(x_n)=۱$

تست: اگر X یک متغیر تصادفی با جدول توزیع احتمال زیر باشد، a کدام است؟

x_i	۱	۲	۳
$\mathbf{p}(x_i)$	$\frac{۱}{۴}$	a	$۲a$

الف) $\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۲}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۶}$

حل: با توجه به شرط **ب** داریم:

$$\mathrm{p}(۱)+\mathrm{p}(۲)+\mathrm{p}(۳)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}+a+۲a=۱ \Rightarrow ۳a=\frac{۳}{۴} \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین جواب صحیح گزینه ی ج می باشد.

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد دفعاتی که سکه رو آمده باشد:

الف) متغیر تصادفی X چه اعدادی را می تواند اختیار کند؟ **ب)** جدول توزیع احتمال را به دست آورید.

حل: الف)

$$S = \{(R,R,R),(R,R,P),(R,P,R),(R,P,P),(P,R,R),(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\} \Rightarrow n(S) = ۸$$

با توجه به فضای نمونه ای تعداد دفعاتی که روی سکه می تواند بیاید عبارت است از: $\mathbf{X} = ۰,۱,۲,۳$

ب) حال احتمال آن که سکه صفر با رو بیاید را با $p(X = ۰)$ ، احتمال آن که یک بار رو بیاید را با $p(X = ۱)$ و...و احتمال آن که ۳ با رو باید را با $p(X = ۳)$ نشان داده و با توجه به فرمول هایی که تاکنون خوانده ایم، آن ها را محاسبه می کنیم.

$$p(X = ۰) = \frac{n(\{X = ۰\})}{n(S)} = \frac{۱}{۸}$$

$$p(X = ۱) = \frac{n(\{X = ۱\})}{n(S)} = \frac{۳}{۸} \qquad p(X = ۲) = \frac{n(\{X = ۲\})}{n(S)} = \frac{۳}{۸} \qquad p(X = ۳) = \frac{n(\{X = ۳\})}{n(S)} = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

x_i	۰	۱	۲	۳
$\mathbf{p}(x_i)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

مثال: از یک کیسه که شامل ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه است، ۳ مهره با هم و به تصادف خارج می کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد مهره های سفید خارج شده باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

حل: متغیر تصادفی X می تواند مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را اختیار کند.

حال احتمال آن که صفر مهره ی سفید خارج شود را با $p(X = ۰)$،احتمال آن که یک مهره ی سفید خارج شود را با $p(X = ۱)$و... و احتمال آن که ۳ با رو باید را با $p(X = ۳)$ نشان داده و با توجه به فرمول هایی که تاکنون خوانده ایم، آن ها را محاسبه می کنیم.

$$p(X = ۰) = \frac{n(\{X = ۰\})}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱۰}{۸۴} \qquad p(X = ۱) = \frac{n(\{X = ۱\})}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰}{۸۴}$$

$$p(X = ۲) = \frac{n(\{X = ۲\})}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۳۰}{۸۴} \qquad p(X = ۳) = \frac{n(\{X = ۳\})}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴}{۸۴}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

x_i	۰	۱	۲	۳
$\mathbf{p}(x_i)$	$\frac{۱۰}{۸۴}$	$\frac{۴۰}{۸۴}$	$\frac{۳۰}{۸۴}$	$\frac{۴}{۸۴}$

مثال: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت
$$\begin{cases} \mathrm{p}(x = i) = \dfrac{i}{i^{۲} + ۳} \; ; i = ۱,۲,۳ \\ \\ \mathrm{p}(x = \mathrm{j}) = \dfrac{۱}{۱۴} \; ; \mathrm{j} = ۴,۵,۶ \end{cases}$$
است.

الف) جدول تابع احتمال X را بنویسید.

ب) مقدار $\mathrm{p}(x \geq ۳)$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} = ۱) = \frac{۱}{۱^{۲} + ۳} = \frac{۱}{۴} \qquad \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۲) = \frac{۲}{۲^{۲} + ۳} = \frac{۲}{۷} \qquad \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۳) = \frac{۳}{۳^{۲} + ۳} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} = ۴) = \frac{۱}{۱۴} \qquad \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۵) = \frac{۱}{۱۴} \qquad \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۶) = \frac{۱}{۱۴}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\mathbf{p}(x_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$

ب)

$$\mathrm{p}(x \geq ۳) = \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۳) + \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۴) + \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۵) + \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۶) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۱۳}{۲۸}$$

توزیع دو جمله ای:

آزمایشی را در نظر بگیرید که فقط دو نتیجه دارد. یکی از نتایج را پیروزی (با احتمال وقوع p) و دیگری را شکست (با احتمال وقوع q) می نامیم.

این آزمایش را n بار تکرار می کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد پیروزی ها در n بار آزمایش در نظر می گیریم.

در این صورت احتمال k بار پیروزی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\mathbf{p}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}\boldsymbol{p}^k\boldsymbol{q}^{n-k} \qquad ;\boldsymbol{q}=۱-\boldsymbol{p}$$

مثال: سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که: الف) ۴ بار رو بیاید ب) حداقل ۹ بار رو بیاید.

حل: در یک مرتبه آزمایش پرتاب سکه فقط دو نتیجه دارد.(رو یا پشت). بنابراین برای حل مساله می توانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم. فرض کنید آمدن رو را پیروزی و آمدن پشت را شکست بنامیم.

$$\left.\begin{array}{l} p=\text{احتمال رو آمدن یک بار پرتاب}=\frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow q=۱-p=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ n=\text{تعداد دفعات تکرار آزمایش}=۱۰ \\ k=\text{تعداد دفعات تکرار پیروزی}=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}\boldsymbol{p}^k\boldsymbol{q}^{n-k} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathrm{X}=۴)=\binom{۱۰}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰-۴}$$

$$=\binom{۱۰}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶$$

ب) حداقل ۹ بار رو بیاید، یعنی یا ۹ بار یا ۱۰ بار رو بیاید.

$$\mathrm{p}(\mathrm{X}\geq ۹)=\mathrm{p}(\mathrm{X}=۹)+\mathrm{p}(\mathrm{X}=۱۰)$$

$$\mathbf{p}(X=۹)=\binom{۱۰}{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰-۹}=\binom{۱۰}{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}=۱۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$$

$$\mathbf{p}(X=۱۰)=\binom{۱۰}{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰-۱۰}=\binom{۱۰}{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$$

$$\Rightarrow p(X=۹)+p(X=۱۰)=۱۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}=۱۱\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$$

مثال: یک تاس را ۵ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن که ۳ بار عدد ۴ بیاید را به دست آورید.

حل: می دانیم در یک مرتبه پرتاب تاس، ۶ حالت وجود دارد. بنابراین با این نمی توانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم. زیرا در توزیع دو جمله ای آزمایش ما فقط دو حالت داشت. برای اینکه بتوانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم، با توجه به صورت سوال، نتایج حاصل از پرتاب تاس را به صورت زیر تغییر می دهیم.

در پرتاب یک تاس یا عدد ۴ ظاهر می شود(موفقیت) و یا عدد ۴ ظاهر نمی شود(شکست). بنابراین در این جا نتیجه آزمایش فقط دو حالت دارد.

$p =$ احتمال ظاهر شدن ۴ یک بار پرتاب تاس $= \frac{۱}{۶}$

$\Rightarrow q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$

$n =$ تعداد دفعات تکرار آزمایش $= ۵$

$k =$ تعداد دفعات تکرار پیروزی $= ۳$

$$\Rightarrow \mathbf{p}(X=k)=\binom{n}{k}\boldsymbol{p}^{k}\boldsymbol{q}^{n-k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}(X=۳)=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۳}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵-۳}=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۳}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}$$

مثال: احتمال این که دانش آموزی در یک امتحان موفق شود ۰/۶ است. اگر ۳ نفر با شرایط یکسان در این آزمون شرکت کنند، احتمال این که حداقل دو نفر از آن ها موفق شوند چه قدر است؟

حل: در این جا آزمایش ما امتحان دادن است که فقط دو نتیجه دارد(موفق شدن یا موفق نشدن). با توجه به صورت سوال احتمال موفق شدن $p = ۰/۶$ می باشد.

$$\left.\begin{array}{l} p = ۰/۶ \Rightarrow q = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴ \\ n = \text{تعداد دفعات تکرار آزمایش} = ۳ \\ k = \text{تعداد دفعات تکرار پیروزی} = ۲ \text{ یا } ۳ \end{array}\right\} \mathrm{p}(\mathrm{X} \geq ۲) = \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۲) + \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۳)$$

$$\mathbf{p}(\mathrm{X} = ۲) = \binom{۳}{۲}\left(\frac{۶}{۱۰}\right)^{۲}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۳-۲} = \binom{۳}{۲}\left(\frac{۶}{۱۰}\right)^{۲}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱} = ۳ \times \frac{۳۶}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۴۳۲}{۱۰۰۰}$$

$$\mathbf{p}(\mathrm{X} = ۳) = \binom{۳}{۳}\left(\frac{۶}{۱۰}\right)^{۳}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۳-۳} = \binom{۳}{۳}\left(\frac{۶}{۱۰}\right)^{۳}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۰} = ۱ \times \frac{۲۱۶}{۱۰۰۰} \times ۱ = \frac{۲۱۶}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{X} \geq ۲) = \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۲) + \mathrm{p}(\mathrm{X} = ۳) = \frac{۴۳۲}{۱۰۰۰} + \frac{۲۱۶}{۱۰۰۰} = \frac{۶۴۸}{۱۰۰۰}$$

مثال: احتمال درمان یک بیماری با دارویی خاص برابر ۰/۷ است. اگر ۵ بیمار همانند دارو را مصرف کنند، احتمال آن که:
الف) ۳ نفر درمان شوند چه قدر است؟ **ب)** ۲ یا ۳ نفر درمان شوند چه قدر است؟

حل: الف)

$$\left.\begin{array}{l} p = ۰/۷ \Rightarrow q = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳ \\ n = ۵ \\ k = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k}\boldsymbol{p}^{k}\boldsymbol{q}^{n-k} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathrm{X} = ۳)$$

$$= \binom{۵}{۳}\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۵-۳} = \binom{۵}{۳}\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۲}$$

ب)
$$p(X=۲)+p(X=۳)=\binom{۵}{۲}\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۳}+\binom{۵}{۳}\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۲}$$

تست: رنگ چشم ۸۰ درصد اهالی منطقه ای میشی است. اگر ۵ نفر به تصادف از این جمعیت انتخاب شوند، با کدام احتمال فقط رنگ چشم ۲ نفر از آن ها میشی است؟ (کنکور سراسری تجربی سال ۷۸)

الف) ۰/۱۰۲۴ ب) ۰/۰۰۵۱۲ ج) ۰/۰۵۱۲ د) ۰/۰۱۰۲۴

حل:

$$p=۸۰\%=\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵},q=۱-p=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵},n=۵,k=۲$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}(X=k)=\binom{n}{k}\boldsymbol{p}^k\boldsymbol{q}^{n-k}\Rightarrow \mathbf{p}(X=۲)=\binom{۵}{۲}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۵-۲}=\binom{۵}{۲}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}$$

$$=۱۰\times\frac{۱۶}{۲۵}\times\frac{۱}{۱۲۵}=\frac{۱۶۰}{۳۱۲۵}=۰/۰۵۱۲$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ج می باشد.

تست: اگر احتمال موفقیت در یک عمل جراحی $\frac{۱}{۲}$ باشد، در بین چهار بیمار احتمال این که حداقل دو بیمار موفق شوند، چه قدر است؟

الف) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ب) $\frac{۵}{۱۶}$ ج) $\frac{۵}{۸}$ د) $\frac{۱}{۸}$

حل:

$$p=\frac{۱}{۲},q=۱-p=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲},n=۴,k\geq ۲$$

$$p(X\geq ۲)=p(X=۲)+p(X=۳)+p(X=۴)=\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}+\binom{۴}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}$$

$$=۶\times\frac{۱}{۱۶}+۴\times\frac{۱}{۱۶}+۱\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه الف می باشد.

مثال: اگر احتمال انتقال ژن های منفی هر یک از والدین به فرزندان ۴۰ ٪ باشد، مطلوبست احتمال آن که در یک خانواده ی ۶ فرزندی ۴ فرزند با RH منفی به دنیا بیایند.

$$\mathrm{p}(\text{RH منفی}) = \mathrm{p}(\text{RH منفی پدر}) \times \mathrm{p}(\text{RH منفی مادر}) = ۰/۴ \times ۰/۴ = ۰/۱۶$$

$$p = ۰/۱۶ \Rightarrow q = ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴, n = ۶\,, k = ۴$$

$$\mathbf{p}(\mathrm{X} = ۴) = \binom{۶}{۴}(۰/۱۶)^{۴}(۰/۸۴)^{۲}$$

نکته: در یک آزمایش تصادفی که فقط دو حالت وجود دارد (مانند دختر یا پسر بودن، رو یا پشت در پرتاب سکه و ...) و n بار تکرار شده است، و در آن ها شکست و پیروزی دارای احتمال یکسان هستند یعنی $p = q = \frac{۱}{۲}$. در این صورت احتمال k بار پیروزی برابر است با:

$$\mathbf{p}(k \text{ بار پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

مثال: سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال این که ۶ بار روی سکه بیاید را حساب کنید.

حل:

روش اول: با استفاده از توزیع دو جمله ای:

$$p = q = \frac{۱}{۲}\,, n = ۱۰, k = ۶ \Rightarrow \mathbf{p}(\mathrm{X} = ۶) = \binom{۱۰}{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} = ۲۱۰ \times \frac{۱}{۶۴} \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}$$

روش دوم: با استفاده از نکته ی بالا:

$$\mathbf{p}(k \text{ بار پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n} \Rightarrow \mathbf{p}(\text{آمدن ۶ بار رو}) = \frac{\binom{۱۰}{۶}}{۲^{۱۰}} = \frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱/ پیش دانشگاهی تجربی/فصل دوم (بخش اول):

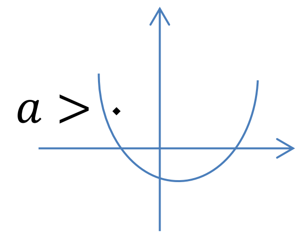
توابع و معادلات

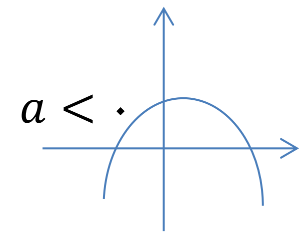
F*unctions* **A***nd* **E***quations*

معادله ی درجه دوم:

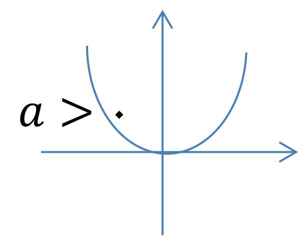
معادله ی $ax^{۲} + bx + c = ۰$ با شرط $a \neq ۰$ را **معادله ی درجه دوم** می گوییم.

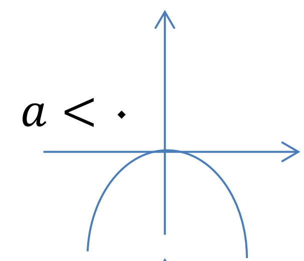
برای به دست آوردن ریشه های این معادله درجه دو، کافی است $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ را به دست آوریم.



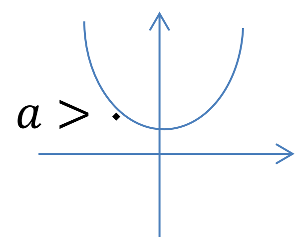


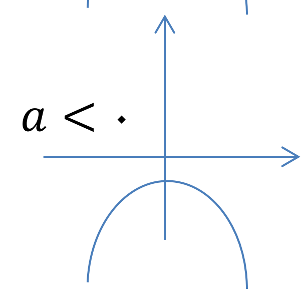
$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد: $x_{۱}, x_{۲} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$





$۲)\ \Delta = ۰ \Rightarrow$ معادله یک ریشه مضاعف دارد: $x_{۱} = x_{۲} = \dfrac{-b}{۲a}$





$۳)\ \Delta < ۰ \Rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله ی $mx^{۲} + (۲m - ۳)x + m - ۱ = ۰$ دارای ریشه ی مضاعف باشد.

حل:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^{۲} - ۴ac = ۰ \Rightarrow (۲m - ۳)^{۲} - ۴(m)(m - ۱) = ۰ \Rightarrow ۴m^{۲} - ۱۲m + ۹ - ۴(m^{۲} - m) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^{۲} - ۱۲m + ۹ - ۴m^{۲} + ۴m = ۰ \Rightarrow -۸m = -۹ \Rightarrow m = \frac{۹}{۸}$$

جدول تعیین علامت $p = ax^۲ + bx + c$ برحسب علامت Δ به یکی از حالات زیر می باشد:

الف) $\Delta > ۰$

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
p		موافق علامت a	●	مخالف علامت a	●	موافق علامت a	

ب) $\Delta = ۰$

x	$-\infty$		$x_۱$		$+\infty$
p		موافق علامت a	●	موافق علامت a	

ج) $\Delta < ۰$

x	$-\infty$		$+\infty$
p		همواره موافق علامت a	

مثال: حدود m را طوری تعیین کنید که معادله ی $x^۲ - mx + ۳ - m = ۰$ دارای دو جواب حقیقی متمایز باشد.

حل: برای آن که معادله ی بالا دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد باید دلتای این معادله بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین با اعمال این شرط به نامعادله ی زیر می رسیم که با حل آن حدود m به دست می آید:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-m)^۲ - ۴(۱)(۳ - m) = m^۲ - ۱۲ + ۴m = m^۲ + ۴m - ۱۲ \xRightarrow{\Delta > ۰} m^۲ + ۴m - ۱۲ > ۰$$

برای حل نامعادله ی بالا ابتدا جواب های معادله ی $m^۲ + ۴m - ۱۲ = ۰$ را به دست آورده و سپس جدول تعیین علامت آن را رسم کرده و با استفاده از آن جواب را به دست می آوریم..

$$m^۲ + ۴m - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۶) = ۰ \Rightarrow m = ۲, m = -۶$$

x	$-\infty$		-۶		۲		$+\infty$
p		$+$	○	$-$	○	$+$	

$\Leftarrow$جواب: $(-\infty, -۶) \cup (۲, +\infty)$

نکته: در معادله ی درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر:

الف) $a + b + c = ۰$ (جمع ضرایب صفر شود) آن گاه یکی از ریشه ها عدد ۱ و دیگری عدد $\frac{c}{a}$ است.

ب) $a - b + c = ۰$ آن گاه یکی از ریشه ها عدد ۱− و دیگری عدد $-\frac{c}{a}$ است.

تست: جواب های معادله ی $(a + b)x^{۲} + (c - a)x - b - c = ۰$ کدام است؟

۱) $۱, -\frac{b + c}{a + b}$ ۲) $۱\,, -b - c$ ۳) $۱\,, \frac{b + c}{a + b}$ ۴) $-۱, -\frac{b + c}{a + b}$

حل: در معادله ی داده شده اگر ضرایب را با هم جمع کنیم، حاصل برابر صفر می شود.

$$(a + b) + (c - a) + (-b - c) = a + b + c - a - b - c = ۰$$

بنابراین یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{-b - c}{a + b} = -\frac{b + c}{a + b}$ است. پاسخ صحیح گزینه ی ۱ می باشد.

روش های تشکیل معادله ی درجه دوم

الف: اگر α و β ریشه های یک معادله ی درجه دوم باشند، از $(x - \alpha)(x - \beta) = ۰$ می توانیم معادله ی درجه دوم را به دست آوریم.

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن دو عدد ۴ و ۵− باشد.

حل:

$$\begin{cases}\alpha = ۴\\ \beta = -۵\end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = ۰ \Rightarrow (x - ۴)\big(x - (-۵)\big) = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۵) = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} - x - ۲۰ = ۰$$

مثال: معادله ای درجه ی دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب های آن $\frac{۱}{۲}$ و ۳- باشد.

حل:

$$\begin{cases}\alpha = \frac{۱}{۲} \\ \beta = -۳\end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \Rightarrow \left(x - \frac{۱}{۲}\right)\left(x - (-۳)\right) = ۰ \Rightarrow \left(x - \frac{۱}{۲}\right)(x+۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} + \frac{۵}{۲}x - \frac{۳}{۲} = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} ۲x^{۲} + ۵x - ۳ = ۰$$

ب: اما اگر به جای خود جواب های α و β، حاصل جمع آن ها (یعنی **S**) و حاصل ضرب آن ها (یعنی **P**) داده شده باشد، معادله را به صورت زیر تشکیل می دهیم.

$$x^{۲} - \mathbf{S}x + \mathbf{P} = ۰$$

مثال: معادله ی درجه دومی را بنویسید که مجموع ریشه های آن $\frac{۱۳}{۶}$ و حاصل ضرب آن ها ۱ باشند.

حل:

$$x^{۲} - \mathbf{S}x + \mathbf{P} = ۰ \xrightarrow{\mathbf{S}=\frac{۱۳}{۶}, \mathbf{P}=۱} x^{۲} - \frac{۱۳}{۶}x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۶}} ۶x^{۲} - ۱۳x + ۶ = ۰$$

روابط بین ضرایب و جواب های معادله ی درجه دوم:

معادله ی درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر α و β ریشه های معادله ی داده شده باشند در این صورت مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه ها} : \mathbf{S} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} : \mathbf{P} = \alpha.\beta = \frac{c}{a}\end{cases}$$

مثال: اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ - ۳x + ۴ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha + \frac{۱}{\alpha} + \beta + \frac{۱}{\beta}$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه ها} : \mathbf{S} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۳}{۱} = ۳ \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} : \mathbf{P} = \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۱} = ۱ \end{cases}$$

$$\alpha + \frac{۱}{\alpha} + \beta + \frac{۱}{\beta} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{\beta + \alpha}{\alpha.\beta}\right) = ۳ + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$$

مثال: اگر مجموع ریشه های معادله ی $x^۲ - (a + ۳)x + ۲a = ۰$ برابر ۶ باشد، حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{c}{a} \Rightarrow ۶ = -\frac{-(a + ۳)}{۱} \Rightarrow a + ۳ = ۶ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{۶}{۱} = ۶$$

مثال: در معادله ی درجه دوم $۲x^۲ + (۲k - ۱)x - k = ۰$ به ازای کدام مقدار k مجموع معکوس دو ریشه برابر $\frac{۷}{۳}$ است؟

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۲k - ۱}{۲} \\ \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-k}{۲} \end{cases}$$

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{\beta+\alpha}{\alpha.\beta}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{-\frac{۲k-۱}{۲}}{\frac{-k}{۲}}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{۲k-۱}{k}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow ۳(۲k-۱)=۷k\Rightarrow ۶k-۳=۷k$$

$$\Rightarrow ۶k-۷k=۳\Rightarrow -k=۳\Rightarrow k=-۳$$

نکته: اگر در معادله ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ، یک ریشه عکس ریشه ی دیگر باشد $\left(\alpha=\frac{۱}{\beta}\right)$،در این صورت داریم:
$a=c$

تست: مقدار m کدام باشد تا دو ریشه ی معادله ی $mx^۲+۴x+۳m-۴=۰$ عکس یکدیگر باشند؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-

حل: طبق نکته ی بالا داریم:

$$\begin{cases}a=m\\c=۳m-۴\end{cases};a=c\Rightarrow m=۳m-۴\Rightarrow m-۳m=-۴\Rightarrow -۲m=-۴\Rightarrow m=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

نکته: اگر در معادله ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ، یک ریشه عکس و قرینه ی ریشه ی دیگر باشد $\left(\alpha=-\frac{۱}{\beta}\right)$
در این صورت داریم: $a=-c$

تست: به ازای چه مقدار m دو ریشه ی معادله ی $۳x^۲+۱۱x-۲m-۷=۰$ عکس و قرینه ی یکدیگرند؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۵

حل: طبق نکته ی بالا داریم:

$$\begin{cases} a=۳ \\ c=-۲m-۷ \end{cases} \quad ; a=-c \Rightarrow ۳=-(-۲m-۷) \Rightarrow ۳=۲m+۷ \Rightarrow ۲m=-۴ \Rightarrow m=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

نکته: می دانیم اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه های معادله ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، در این صورت داریم:

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=-(x_۱+x_۲) \qquad x_۱.x_۲=\frac{c}{a}$$

در نتیجه داریم:

$$ax^۲+bx+c=a\left(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\big(x^۲-(x_۱+x_۲)x+x_۱.x_۲\big)=a\big(x^۲+(-x_۱-x_۲)x+x_۱.x_۲\big)$$

$$=a(x-x_۱)(x-x_۲) \Rightarrow ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

مثال: معادله ی سهمی را بنویسید که محور طول ها را در $x=۳$ و $x=۱$ و محور عرض ها را در $y=۶$ قطع کند.

حل: اگر تابع درجه دوم را به صورت $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نمایش دهیم، $x_۱$ و $x_۲$ محل های برخورد نمودار تابع با محور طول ها می باشند. بنابراین داریم:

$$y=a(x-۱)(x-۳)$$

از طرفی، نمودار سهمی محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۶ قطع می کند. پس نقطه ای به مختصات $(۰,۶)$ در معادله ی تابع صدق می کند. در نتیجه:

$$y=a(x-۱)(x-۳) \Rightarrow ۶=a(۰-۱)(۰-۳) \Rightarrow ۶=۳a \Rightarrow a=۲ \Rightarrow y=۲(x-۱)(x-۳)$$

تشکیل معادله ی درجه دوم جدید از روی معادله ی مفروض:

الف) در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر b را قرینه کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **قرینه ی** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش قرینه ی ریشه های معادله ی $۳x^۲ - ۷x - ۱ = ۰$ باشد کدام است؟

۱) $۳x^۲ + ۷x - ۱ = ۰$ ۲) $-۳x^۲ - ۷x - ۱ = ۰$ ۳) $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ ۴) $-۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$

حل: کافی است b را قرینه کنیم. پس معادله به صورت $۳x^۲ + ۷x - ۱ = ۰$ می باشد. گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ب) در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر جای a و c را عوض کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **عکس** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله ی $۵x^۲ - ۱۳x - ۱ = ۰$ باشد کدام است؟

۱) $-۵x^۲ + ۱۳x + ۱ = ۰$ ۲) $۵x^۲ + ۱۳x - ۱ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۱۳x - ۵ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۰$

حل: کافی است جای a و c را عوض کنیم. بنابراین معادله ی جدید به صورت $-x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۰$ می باشد.

با توجه به گزینه ها اما به ظاهر جوابی وجود ندارد. اما چون طرفین یک تساوی را می توان در یک مقدار دلخواه ضرب کرد، اگر معادله ی $-x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۰$ را در (-۱) ضرب کنیم، معادله به صورت $x^۲ + ۱۳x - ۵ = ۰$ در می آید.

پس گزینه ی ۳ پاسخ صحیح می باشد.

ج) در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر جای a و c را عوض کرده و b را قرینه کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **عکس و قرینه ی** ریشه های معادله ی مفروض است.

د) در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر b را در k و c را در $k^۲$ ضرب کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش $\boldsymbol{k}$ **برابر** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله ی $x^۲ + x - ۳ = ۰$ باشد کدام است؟

۱) $-۵x^۲ + ۱۳x + ۱ = ۰$ ۲) $۵x^۲ + ۱۳x - ۱ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۱۳x - ۵ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۰$

حل: کافی است b را در $k = ۹$ و c را در $k^۲ = ۸۱$ ضرب کنیم. در این صورت معادله ی جدید به صورت $x^۲ + ۹x - ۲۴۳ = ۰$ خواهد شد. بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۱ می باشد.

نکته: روش دیگر برای حل این گونه سوالات آن است که بگوییم اگر x ریشه ی معادله ی اولیه باشد، X ریشه ی معادله ی جدید است. سپس با جایگذاری در معادله ی قدیم، معادله ی جدید را به دست آوریم.

مثلا اگر بخواهیم معادله ی جدید ریشه هایش k واحد بیش تر از ریشه های معادله ی اولیه باشد، در این صورت: $\mathrm{X} = x + k$ و در نتیجه $x = \mathrm{X} - k$. یعنی در معادله ی اولیه کافی است به جای x قرار دهیم $\mathrm{X} - k$ و سپس معادله را ساده کنیم.

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲ واحد بزرگ تر از ریشه های معادله ی درجه دوم $۲x^{۲} - ۵x + ۳ = ۰$ باشد.

حل:

$$\mathrm{X} = x + ۲ \Rightarrow x = \mathrm{X} - ۲ \Rightarrow ۲(\mathrm{X} - ۲)^{۲} - ۵(\mathrm{X} - ۲) + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲\left(\mathrm{X}^{۲} - ۴\mathrm{X} + ۴\right) - ۵\mathrm{X} + ۱۰ + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{X}^{۲} - ۸\mathrm{X} + ۸ - ۵\mathrm{X} + ۱۳ = ۰ \Rightarrow ۲\mathrm{X}^{۲} - ۱۳\mathrm{X} + ۲۱ = ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۳x + ۲۱ = ۰$$

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله ی درجه دوم $۲x^{۲} - ۵x - ۷ = ۰$ باشد.

حل:

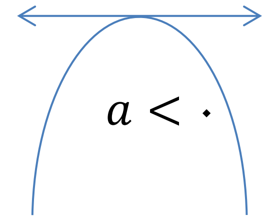
$$\mathrm{X} = x^{۲} \Rightarrow x = \sqrt{\mathrm{X}} \Rightarrow ۲\left(\sqrt{\mathrm{X}}\right)^{۲} - ۵\left(\sqrt{\mathrm{X}}\right) - ۷ = ۰ \Rightarrow ۲\mathrm{X} - ۵\sqrt{\mathrm{X}} - ۷ = ۰ \Rightarrow ۲\mathrm{X} - ۷ = ۵\sqrt{\mathrm{X}}$$

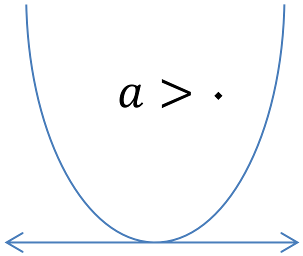
$$\xRightarrow{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} (۲\mathrm{X} - ۷)^{۲} = \left(۵\sqrt{\mathrm{X}}\right)^{۲} \Rightarrow ۲\mathrm{X}^{۲} - ۲۸\mathrm{X} + ۴۹ = ۲۵\mathrm{X} \Rightarrow ۲\mathrm{X}^{۲} - ۵۳\mathrm{X} + ۴۹ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۵۳x + ۴۹ = ۰$$

تابع درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + c$:

نمودار این تابع **سهمی قائم** نام دارد. اگر ضریب $x^{۲}$ یعنی a عددی مثبت باشد آن گاه سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است. و اگر ضریب $x^{۲}$ یعنی a عددی منفی باشد آن گاه سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.





$$max = \text{راس سهمی} = \left(-\frac{b}{۲a}, \frac{\Delta}{۴a}\right)$$

$$min = \text{راس سهمی} = \left(-\frac{b}{۲a}, \frac{\Delta}{۴a}\right)$$

مثال: کمترین مقدار تابع $y = f(x) = ۲x^{۲} - ۳x + ۴$ را به دست آورید.

طول نقطه ی مینیمم : $x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{-۳}{۲(۴)} = \frac{۳}{۸}$

عرض نقطه ی مینیمم : $y = \frac{\Delta}{۴a} = \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a} = \frac{(-۳)^{۲} - ۴(۲)(۴)}{۴(۲)} = \frac{۹ - ۳۲}{۸} = \frac{۲۳}{۸}$

$$\Rightarrow min = \left(\frac{۳}{۸}, \frac{۲۳}{۸}\right)$$

نکته: اگر منحنی یک تابع به صورت $y = a(x - x_{.})^{۲} + y_{.}$ باشد، در این صورت مختصات راس سهمی که همان ماکزیمم یا مینیمم است به صورت $S(x_{.}, y_{.})$ می باشد. اگر $a > ۰$ این نقطه مینیمم و اگر $a < ۰$ این نقطه ماکزیمم است.

مثال: مختصات راس منحنی $y = -۲(x+۵)^{۲} - ۳$ را به دست آورده و مشخص کنید این منحنی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟

حل: چون $a = -۲ < ۰$ بنابراین این منحنی دارای ماکزیمم است و مختصات راس منحنی که همان نقطه ی ماکزیمم می باشد عبارت است: $\mathbf{S}(x_۰, y_۰) = (-۵, -۳)$

تبدیل تابع از فرم $y = ax^{۲} + bx + c$ **به فرم** $y = a(x - x_۰)^{۲} + y_۰$**:**

برای این کار از روش مربع کامل استفاده کرده به این صورت که بعد از تبدیل ضریب $x^{۲}$ به یک (به کمک فاکتورگیری) نصف ضریب x به توان دو را به ضابطه ی تابع اضافه و از آن کم می کنیم. سپس با استفاده از تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تابع را به فرم مورد نظر تبدیل می کنیم.

مثال:

$$y = x^{۲} + ۲x - ۲ \xRightarrow{\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{۲}{۲}\right)^{۲} = ۱} y = x^{۲} + ۲x - ۲ + ۱ - ۱ = x^{۲} + ۲x + ۱ - ۱ - ۲$$

$$\Rightarrow y = (x+۱)^{۲} - ۳ \quad \Rightarrow \mathbf{S}(x_۰, y_۰) = (-۱, -۳)$$

مثال:

$$y = ۲x^{۲} - ۴x + ۵ \xRightarrow{\text{فاکتورگیری از } ۲} y = ۲\left(x^{۲} - ۲x + \frac{۵}{۲}\right) \xRightarrow{\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{-۲}{۲}\right)^{۲} = ۱} y = ۲\left(x^{۲} - ۲x + \frac{۵}{۲} + ۱ - ۱\right)$$

$$\Rightarrow y = ۲\left(x^{۲} - ۲x + ۱ - ۱ + \frac{۵}{۲}\right) \Rightarrow y = ۲\left((x-۱)^{۲} + \frac{۳}{۲}\right) \Rightarrow y = ۲(x-۱)^{۲} + ۳$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}(x_۰, y_۰) = (۱, -۳)$$

تست: اگر نقطه ای به طول ۱− ماکزیمم تابع $y=(۱-m)x^{۲}+(m^{۲}-۶)x+۱$ باشد m برابر است با:

۱) ۳−　　　۲) ۴−　　　۳) ۱−　　　۴) ۲

حل:

$$\begin{cases} a<۰\Rightarrow ۱-m<۰\Rightarrow m>۱ \\ x=-\dfrac{b}{۲a}\Rightarrow -۱=-\dfrac{m^{۲}-۶}{۲(۱-m)} \end{cases}\Rightarrow m^{۲}-۶=۲-۲m\Rightarrow m^{۲}+۲m-۸=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۲ \\ m=-۴ \end{cases}$$

چون $m>۱$ پس $m=۲$ قابل قبول است. بنابراین گزینه ی ۴ پاسخ صحیح می باشد.

نکته: معادله ی تقارن در سهمی قائم $x=-\dfrac{b}{۲a}$ می باشد.

تست: معادله ی محور تقارن منحنی $x+y=x^{۲}$ کدام است؟

۱) $۲x+۱=۰$　　　۲) $۲y-۱=۰$　　　۳) $۲x-۱=۰$　　　۴) $۲y+۱=۰$

حل:

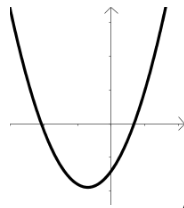
$$x+y=x^{۲}\Rightarrow y=x^{۲}-x$$

$$x=-\frac{b}{۲a}\xRightarrow{a=۱,b=-۱}x=-\frac{-۱}{۲(۱)}\Rightarrow ۲x=۱\Rightarrow ۲x-۱=۰$$

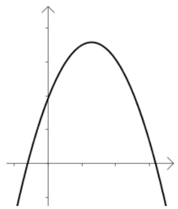
تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = (۱ - m)x^۲ + x + m - ۲$ از چهار ناحیه ی محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m < ۱$　　۲) $m > ۲$　　۳) $۱ < m < ۲$　　۴) $-۱ < m < ۲$

حل: چون سهمی از هر چهار ناحیه می گذرد، پس نمودار آن به صورت

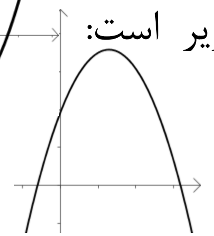


یا



می باشد.

اما چون دارای ماکزیمم است پس $a < ۰$ و نمودار به صورت زیر است:



با توجه به این نمودار محل برخورد با محور x ها در واقع ریشه های معادله ی مربوط به این سهمی یکی مثبت و دیگری منفی است.

در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها منفی است.

$$\begin{cases} a < ۰ \Rightarrow ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \text{(I)} \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} < ۰ \Rightarrow \dfrac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \dfrac{m - ۲}{۱ - m} < ۰ \end{cases}$$

m		۱ ، ۲	
$۱ - m$	$+$	$-$	$-$
$m - ۲$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$

با توجه به جدول تعیین علامت جواب عبارت است از:

$$m < ۱ \text{ و } m > ۲ \text{ (II)} \quad \xRightarrow{\text{(I)}\cap\text{(II)}} m > ۲$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

مثال: حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضرب آن ها ماکزیمم شود.

حل: دو عدد را x و y می نامیم. داریم: $x+y=۱۱۰$ می خواهیم حاصل ضرب آن ها یعنی $\mathrm{P}=x.y$ ماکزیمم شود.

$$x+y=۱۱۰ \Rightarrow y=۱۱۰-x \Rightarrow \mathbf{P}=x.y=x(۱۱۰-x)=۱۱۰x-x^{۲}=-x^{۲}+۱۱۰x$$

حاصل، یک تابع درجه دوم است و چون $a=-۱<۰$ بنابراین دارای ماکزیمم می باشد. اما مختصات نقطه ی ماکزیمم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۱۰}{۲(-۱)}=۵۵ \xrightarrow{y=۱۱۰-x} y=۱۱۰-۵۵=۵۵ \quad \Rightarrow \begin{cases} x=۵۵ \\ y=۵۵ \end{cases}$$

مثال: محیط یک مستطیل برابر ۱۰۰ است. طول و عرض مستطیل را چنان بیابید که مساحت این مستطیل ماکزیمم شود.

حل: طول مستطیل را x و عرض آن را y می نامیم. داریم: $۱۰۰=$ محیط می خواهیم مساحت آن ماکزیمم شود.

$$۲(x+y)=۱۰۰ \Rightarrow x+y=۵۰ \Rightarrow y=۵۰-x \Rightarrow \mathbf{S}=x.y=x(۵۰-x)=۵۰x-x^{۲}=-x^{۲}+۵۰x$$

حاصل، یک تابع درجه دوم است و چون $a=-۱<۰$ بنابراین دارای ماکزیمم می باشد. اما مختصات نقطه ی ماکزیمم:

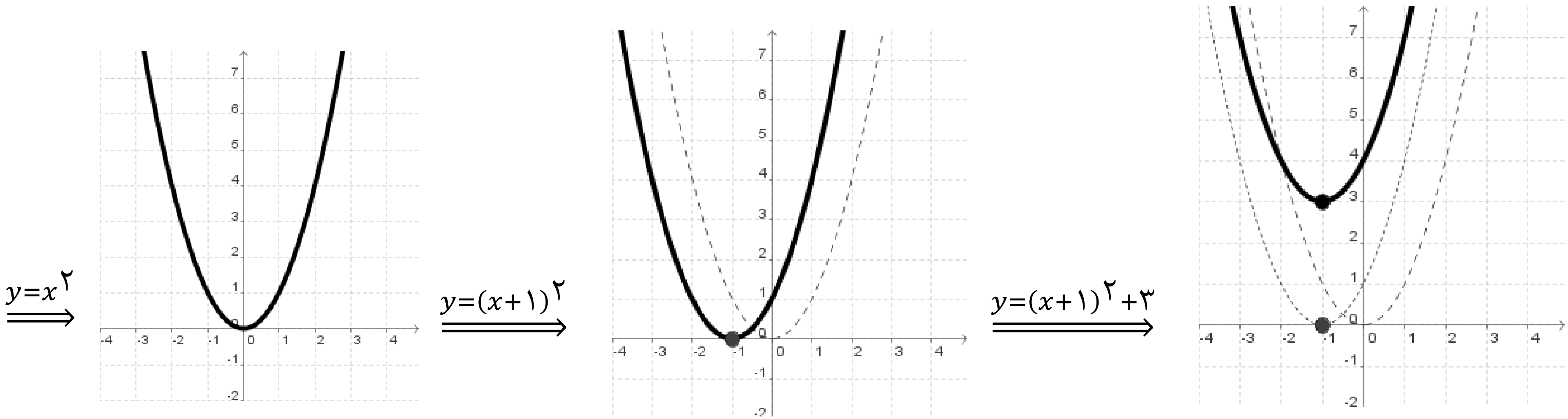
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵۰}{۲(-۱)}=۲۵ \xrightarrow{y=۵۰-x} y=۵۰-۲۵=۲۵ \quad \Rightarrow \begin{cases} x=۲۵ \\ y=۲۵ \end{cases}$$

رسم منحنی درجه دوم:

الف) به کمک انتقال:

در این روش ابتدا نمودار $y = x^{۲}$ را رسم می کنیم. سپس با توجه به مقداری که به x اضافه و یا از آن کم می شود، هم چنین مقداری که به خود تابع اضافه و یا از آن کم می شود، نمودار را در راستای افقی و یا عمودی انتقال می دهیم.

مثال: نمودار تابع $y = (x + ۱)^{۲} + ۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.



ب) به کمک مختصات راس سهمی و نقطه یابی:

اگر منحنی درجه دوم به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ باشد برای رسم آن کافی است $x = -\dfrac{b}{۲a}$ را به دست آورده، یک عدد قبل و یک عدد بعد از آن را در جدول نوشته و مقادیر y را برای آن ها به دست آوریم.

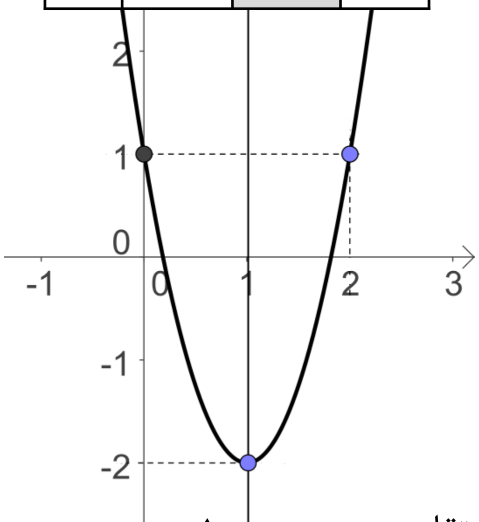
اما در صورتی که منحنی درجه دوم به صورت $y = a(x - x_{۰})^{۲} + y_{۰}$ باشد، نقطه ی $\mathbf{S}(x_{۰}, y_{۰})$ را در نظر گرفته، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از $x_{۰}$ را در جدول نوشته و مقادیر y را برای آن ها به دست می آوریم.

مثال: نمودار مربوط به هر تابع را رسم کنید.

۱) $y = ۳x^{۲} - ۶x + ۱$

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۶}{۲(۳)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

x	۰	۱	۲
y	۱	-۲	۱

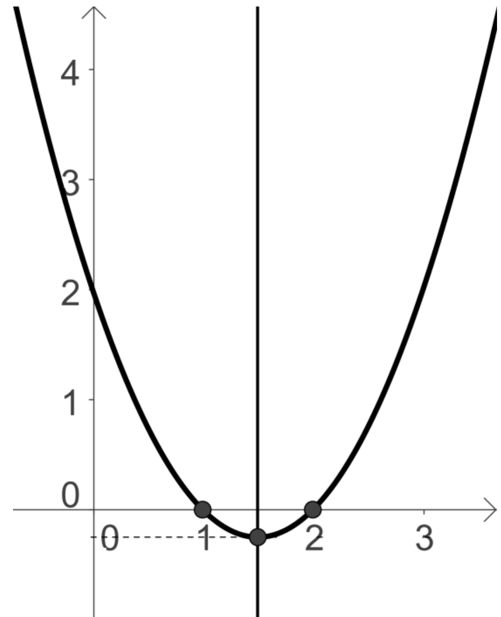


محور تقارن سهمی: $x = ۱$

۲) $y = (x - ۱)(x - ۲) \quad \Rightarrow y = x^{۲} - ۳x + ۲$

x	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
y	۰	$-\frac{۱}{۴}$	۰

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۳}{۲(۱)} = \frac{۳}{۲}$$



محور تقارن سهمی: $x = -\frac{۳}{۲}$

۳) $y = ۲(x - ۱)^{۲} - ۳$

$\mathbf{S}(x_{۰}, y_{۰}) = (۱, -۳)$

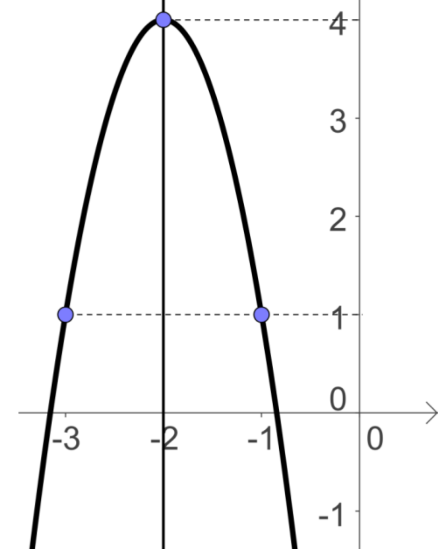
x	۰	۱	۲
y	-۱	-۳	-۱

۳) $y = -۳(x + ۲)^{۲} + ۴$

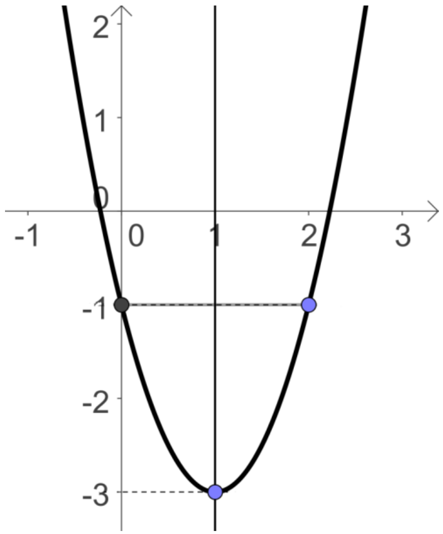
$\mathbf{S}(x_{۰}, y_{۰}) = (-۲, ۴)$

x	-۳	-۲	-۱
y	۱	۴	۱

$\text{P}_{max} =$ راس سهمی $= (-۲, ۴)$



$x = -۲$ محور تقارن سهمی

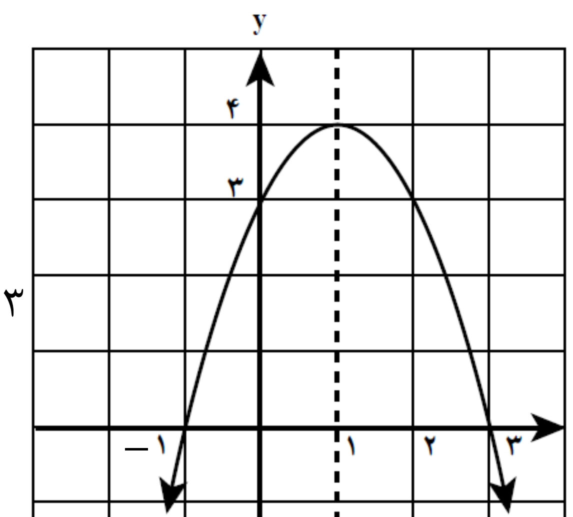


$\text{P}_{min} =$ راس سهمی $= (۱, -۳)$

$x = ۱$ محور تقارن سهمی

نکته: برای رسم دقیق تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز می توانیم به دست می آوریم.

مثال: نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۳$ را رسم کنید.



$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۲}{۲(-۱)} = -\frac{۲}{-۲} = ۱$$

x	۰	۱	۲
y	۳	۴	۳

محل برخورد نمودار با محور xها : $y = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۳$

محل برخورد نمودار با محور yها : $x = ۰ \Rightarrow y = ۳$

نکته: اگر دو نقطه ی N و M روی نمودار تابع درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + c$ دارای عرض های یکسان باشند، آن گاه طول راس سهمی برابر است با نصف مجموع طول های آن دو نقطه و با جایگذاری طول راس سهمی در معادله ی سهمی می توانیم عرض راس سهمی و در نتیجه مختصات راس سهمی را به دست آوریم.

$$x_{\text{راس سهمی}} = \frac{x_{\mathrm{N}} + x_{\mathrm{M}}}{۲}$$

مثال: سهمی به معادله ی $y = \frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳)$ را رسم کنید.

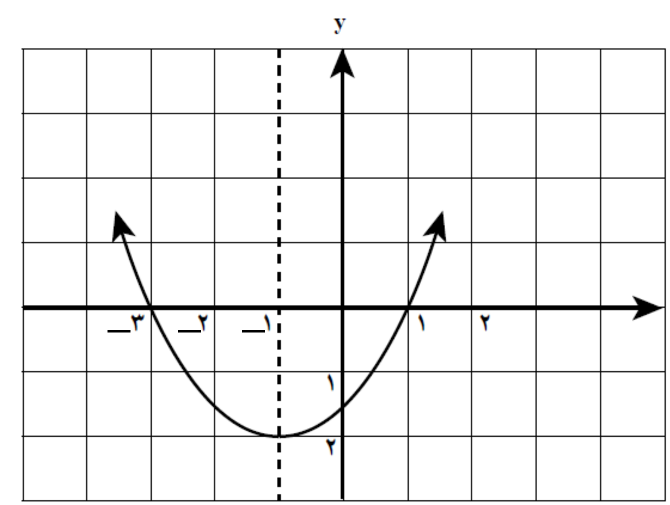
محل برخورد نمودار با محور xها : $y = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x = -۳, ۱ \Rightarrow (-۳,۰), (۱,۰)$

دو نقطه ی بالا دارای عرض یکسان هستند. بنابراین از نکته ی گفته شده استفاده می کنیم تا طول راس سهمی را به دست آوریم.

$$x_{\text{راس سهمی}} = \frac{-۳+۱}{۲} = \frac{-۲}{۲} = -۱ \Rightarrow y_{\text{راس سهمی}} = \frac{۱}{۲}(-۱-۱)(-۱+۳) = \frac{۱}{۲}(-۲)(+۲) = -۲$$

محل برخورد نمودار با محور yها :

$$x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(۰-۱)(۰+۳) = \frac{۱}{۲}(-۱)(۳) = \frac{-۳}{۲}$$



قدر مطلق:

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق آن را به صورت $|x|$ نمایش می دهیم و داریم:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$$

این تعریف بیان می کند که اگر عبارت داخل قدرمطلق مقداری مثبت باشد، خود عبارت را می نویسیم یعنی: $|x| = x$

در صورتی که عبارت داخل قدرمطلق مقداری منفی باشد، قرینه ی عبارت داخل قدرمطلق را می نویسیم. یعنی: $|x| = -x$

مثال: اگر $-۱ < x < ۰$ ، آن گاه حاصل عبارت $A = |x+۱| - |۲x-۳| + |x|$ را به دست آورید.

حل: باید علامت عبارت های داخل قدرمطلق را در فاصله ی $-۱ < x < ۰$ تعیین کنیم. اگر علامت عبارات داخل قدرمطلق به ازای مثبت شود، خود عبارت را می نویسیم و اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی شد، قرینه ی عبارت را می نویسیم.

برای این کار می توانیم عددی دلخواه مثلا $x = -\frac{۱}{۲}$ را در ذهن خود در نظر گرفته و علامت داخل قدرمطلق را مشخص کنیم.

$$A = \underbrace{|x+۱|}_{\text{مثبت است}} - \underbrace{|۲x-۳|}_{\text{منفی است}} + \underbrace{|x|}_{\text{منفی است}} = (x+۱) - \big(-(۲x-۳)\big) + (-x) = x+۱+۲x-۳-x = ۲x-۲$$

خواص قدر مطلق:

۱) $|x| \geq ۰$

۲) $|-x| = |x|$

۳) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

۴) $|x| = a \overset{a\geq ۰}{\Longrightarrow} x = \pm a$

۵) $|x.y| = |x|.|y|$

۶) $|x| \leq a \overset{a\geq ۰}{\Longrightarrow} -a \leq x \leq +a$

۷) $|x| \geq a \overset{a\geq ۰}{\Longrightarrow} x \geq a$ یا $x \leq -a$

۸) $|x+y| \leq |x| + |y|$

۹) $\sqrt[۲n]{x^{۲n}} = |x|$

۱۰) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱)\ |۲x-۷|<۴$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۶}} -۴<۲x-۷<۴ \Rightarrow -۴+۷<۲x-۷+۷<۴+۷ \Rightarrow ۳<۲x<۱۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<\frac{۱۱}{۲}$$

$$۲)\ |۳x+۵|\geq ۷$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۷}} \begin{cases} ۳x+۵\geq ۷ \Rightarrow ۳x\geq ۷-۵ \Rightarrow ۳x\geq ۲ \Rightarrow x\geq \frac{۲}{۳} \\ \text{یا} \\ ۳x+۵\leq -۷ \Rightarrow ۳x\leq -۷-۵ \Rightarrow ۳x\leq -۱۲ \Rightarrow x\leq -۴ \end{cases}$$

$$۳)\ |۳x-۹|=|x+۵|$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۳}} ۳x-۹=\pm(x+۵) \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۹=x+۵ \Rightarrow ۳x-x=۵+۹ \Rightarrow ۲x=۱۴ \Rightarrow x=۷ \\ ۳x-۹=-x-۵ \Rightarrow ۳x+x=-۵+۹ \Rightarrow ۴x=۴ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

$$۴)\ |۵x-۳|=۹$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۴}} ۵x-۳=\pm ۹ \Rightarrow \begin{cases} ۵x-۳=۹ \Rightarrow ۵x=۹+۳ \Rightarrow ۵x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۱۲}{۵} \\ ۵x-۳=-۹ \Rightarrow ۵x=-۹+۳ \Rightarrow ۵x=-۶ \Rightarrow x=\frac{-۶}{۵} \end{cases}$$

$$۵)\ |x+۱|\leq |x+۳|$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x+۱)^۲\leq (x+۳)^۲ \Rightarrow x^۲+۲x+۱\leq x^۲+۶x+۹ \Rightarrow ۲x-۶x\leq ۹-۱ \Rightarrow -۴x\leq ۸$$

$$\Rightarrow ۴x\geq -۸ \Rightarrow x\geq -۲$$

مثال: معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x| - ۲| = ۴$

$$\xRightarrow{\text{خاصیت ۴}} |x| - ۲ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} |x| - ۲ = ۴ \Rightarrow |x| = ۴ + ۲ \Rightarrow |x| = ۶ \xRightarrow{\text{خاصیت ۴}} x = \pm ۶ \\ |x| - ۲ = -۴ \Rightarrow |x| = -۴ + ۲ \Rightarrow |x| = -۶ \;(\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

ب) $$\frac{۴}{|۲x + ۶|} = ۲ \Rightarrow \frac{۴}{|۲(x + ۳)|} = ۲ \Rightarrow \frac{۴}{|۲||x + ۳|} = ۲ \Rightarrow \frac{۴}{۲|x + ۳|} = ۲ \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴|x + ۳| = ۴$$

$$\Rightarrow |x + ۳| = ۱ \xRightarrow{\text{خاصیت ۴}} x + ۳ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x + ۳ = ۱ \Rightarrow x = -۲ \\ x + ۳ = -۱ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

مثال: نامعادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $|۳ - ۵x| < ۸$

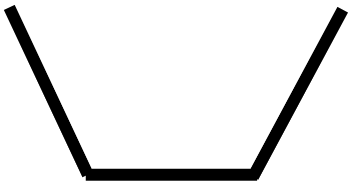
$$\xRightarrow{\text{خاصیت ۶}} -۸ < ۳ - ۵x < ۸ \Rightarrow -۱۱ < -۵x < ۵ \xRightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر } -۵} \frac{-۱۱}{-۵} > \frac{-۵x}{-۵} > \frac{۵}{-۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱}{۵} > x > -۱ \Rightarrow -۱ < x < \frac{۱۱}{۵}$$

ب) $$\left|\frac{۲}{۳x + ۱}\right| > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{|۲|}{|۳x + ۱|} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{|۳x + ۱|} > \frac{۱}{۲} \xRightarrow[\text{چون طرفین نامساوی مثبت است، جهت نامساوی عوض می شود.}]{\text{طرفین نامساوی را معکوس می کنیم.}} \frac{|۳x + ۱|}{۲} < ۲$$

$$\Rightarrow |۳x + ۱| < ۴ \xRightarrow{\text{خاصیت ۶}} -۴ < ۳x + ۱ < ۴ \Rightarrow -۵ < ۳x < ۳ \Rightarrow \frac{-۵}{۳} < x < \frac{۳}{۳} \Rightarrow \frac{-۵}{۳} < x < ۱$$

نکته: تابع $y = |x-a| + |x-b|$ را در نظر بگیرید. برای رسم این تابع کافی است ریشه های داخل قدرمطلق را به دست آورده، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از این اعداد را در نظر گرفته و در یک جدول می نویسیم.



نمودار این تابع به شکل زیر می باشد: (که به آن نمودار گلدانی نیز گفته می شود.)

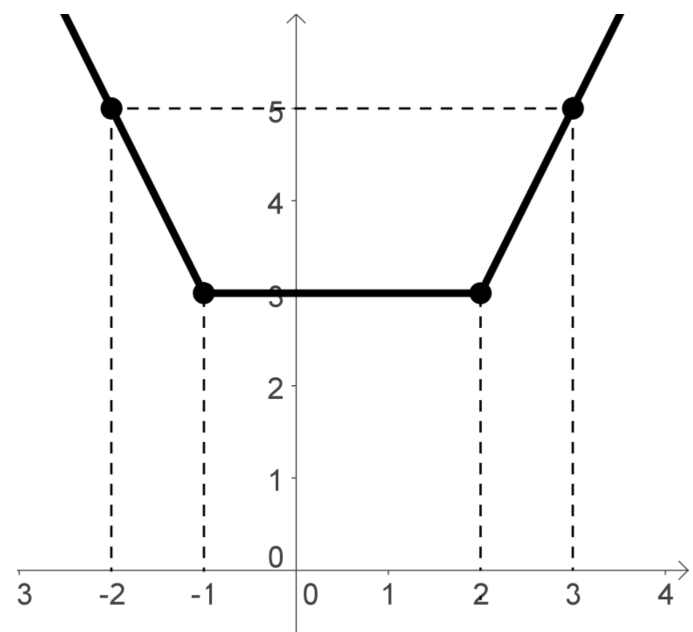
در این تابع خط $x = \frac{a+b}{۲}$ محور تقارن است. دامنه ی این تابع R و برد آن $[|a-b|, +\infty)$ می باشد.

مثال: نمودار تابع $y = |x-۲| + |x+۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا ریشه های عبارت های داخل قدرمطلق را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ = a \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ = b \end{cases}$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۵	۳	۳	۳	۳	۵



$$|a-b| = |۲ - (-۱)| = ۳$$

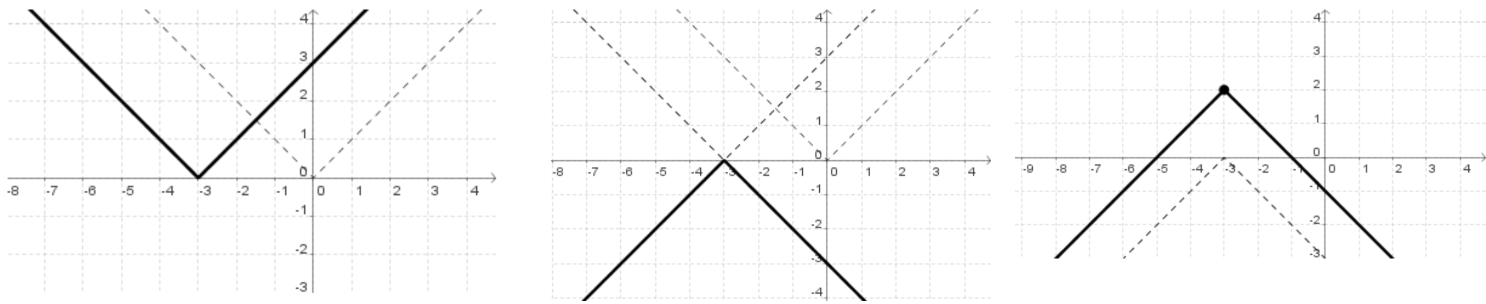
دامنه ی این تابع R و برد آن $[۳, +\infty)$ می باشد.

رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق به کمک تابع $y=|x|$ و به روش انتقال:

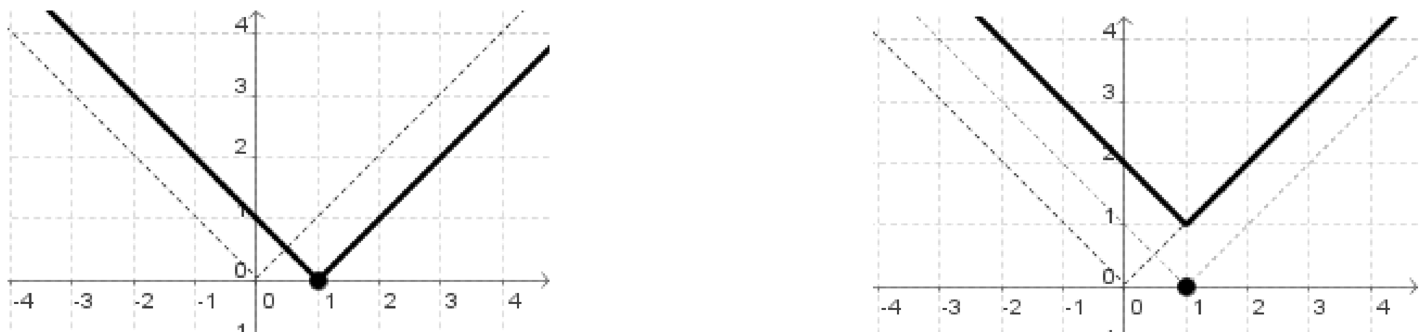
در این روش ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می کنیم. سپس با توجه به مقداری که به x اضافه و یا از آن کم می شود، هم چنین مقداری که به خود تابع اضافه و یا از آن کم می شود، نمودار را در راستای افقی و یا عمودی انتقال می دهیم.

مثال: ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

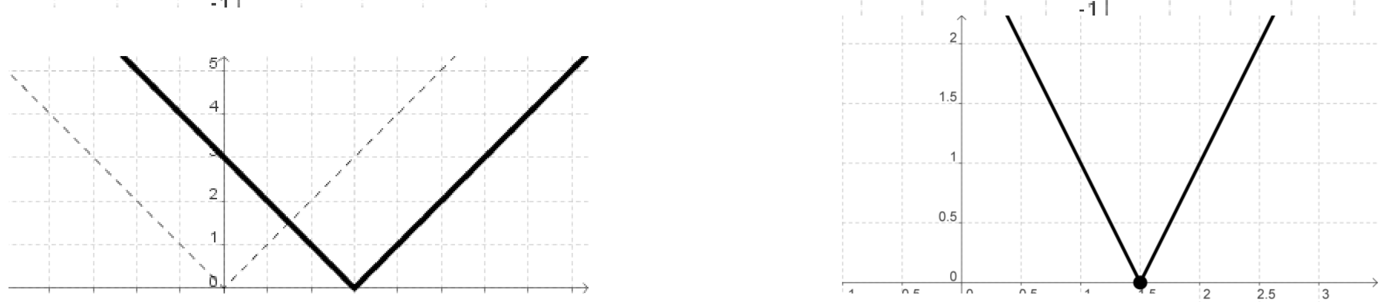
۱) $y=۲-|x+۳|$



۲) $y=|x-۱|+۱$



۳) $y=|۲x-۳|$



ابتدا نمودار $y=|x-۳|$ را رسم کرده سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم.

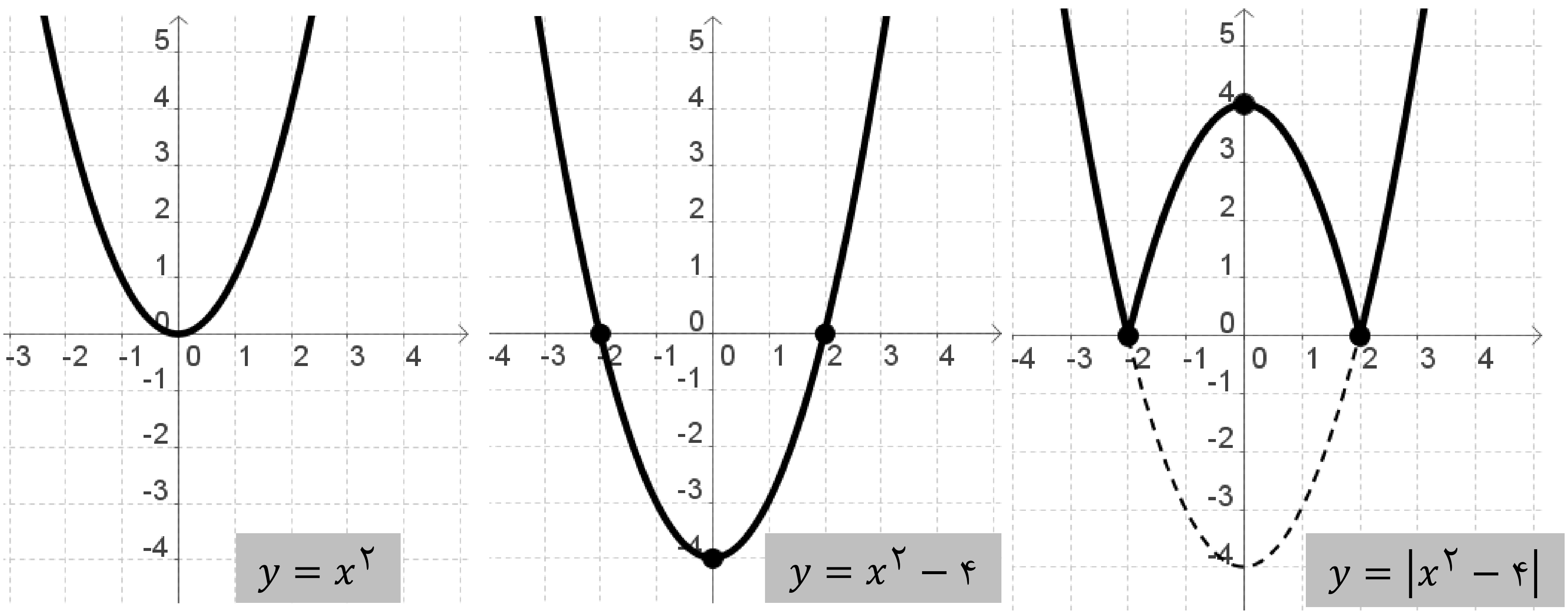
رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$:

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت هایی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد را حذف و نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. به این ترتیب نمودار $y = |f(x)|$ به دست می آید.

مثال: نمودار تابع $y = |x^{۲} - ۴|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = x^{۲} - ۴$ را با استفاده از انتقال رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

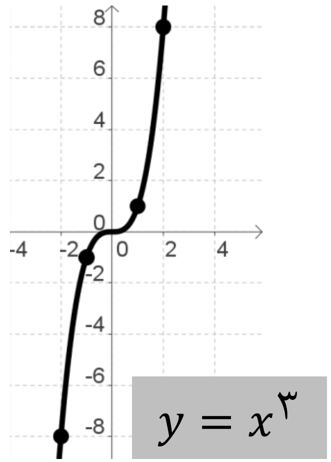


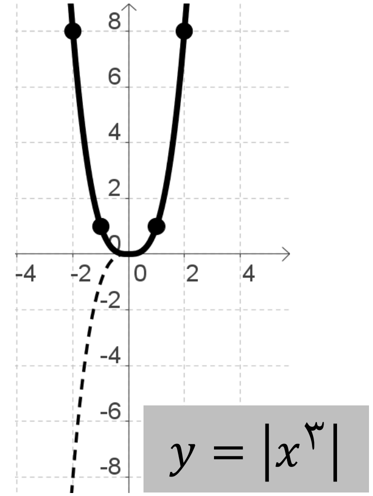
مثال: نمودار $y = |x^۳|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = x^۳$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۸	−۱	۰	۱	۸



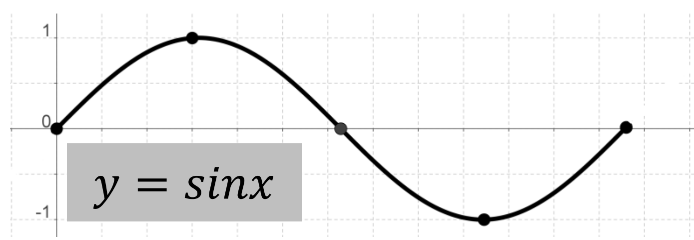


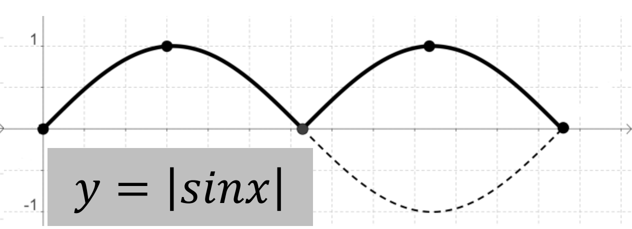
مثال: نمودار $y = |sinx|$ را در بازه ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = x^۳$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	−۱	۰





روش تبدیل تابع قدرمطلقی به یک تابع چند ضابطه ای و رسم آن:

در این روش ابتدا عبارات درون قدر مطلق را برابر صفر قرار می دهیم تا ریشه های آن ها را به دست آوریم. سپس دامنه ی تابع قدر مطلقی را به ازای ریشه های به دست آمده به قسمت های مختلفی تقسیم می کنیم.

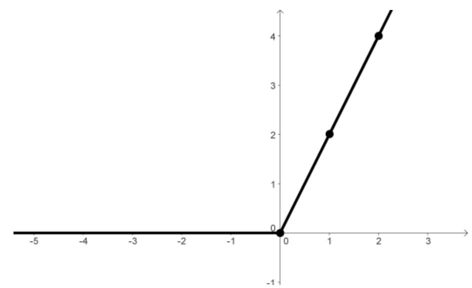
با توجه به محدوده ی x، در هر قسمت، علامت عبارات درون قدرمطلق ها را مشخص کرده و آن گاه قدر مطلق را بر می داریم.

در نهایت نمودار ضابطه های به دست آمده در هر قسمت را با توجه به محدوده ی x آن ها رسم می کنیم.

به عنوان مثال برای رسم تابع $y = x + |x|$ ابتدا ریشه ی عبارت درون قدر مطلق را به دست می آوریم. $(x = ۰)$

سپس دامنه ی تابع $y = x + |x|$ که R می باشد را با توجه ریشه ی به دست آمده به دو قسمت $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تقسیم می کنیم که در نهایت به تابع زیر می رسیم:

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x \ ; x \geq ۰ \\ \\ x - x \ ; x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲x \ ; x \geq ۰ \\ \\ ۰ \ ; x < ۰ \end{cases}$$

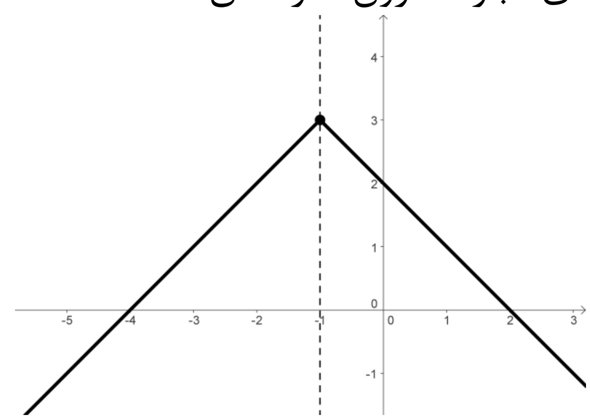


مثال: تابع $y = ۳ - |x + ۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

حل: ریشه ی عبارت درون قدرمطلق $x = -۱$ است. دامنه ی تابع را به $x \geq -۱$ و $x < -۱$ تقسیم می کنیم.

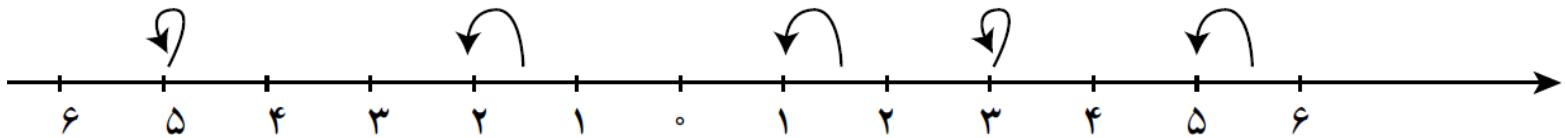
$$y = ۳ - |x + ۱| = \begin{cases} ۳ - (x + ۱) \ ; x \geq -۱ \\ \\ ۳ - [-(x + ۱)] \ ; x < -۱ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۲ - x \ ; x \geq -۱ \\ \\ ۴ + x \ ; x < -۱ \end{cases}$$



جزء صحیح (براکت):

جزء صحیح x، اولین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.



$[-۵] = ۵$ $\quad \left[۱\frac{۳}{۵}\right] = ۲$ $\quad [\sqrt{۲}] = ۱$ $\quad [۳] = ۳$ $\quad [۵/۷] = ۵$

برای محاسبه ی جزء صحیح یک عدد روش زیر را به کار می بندیم:

الف) اگر x عددی صحیح باشد $(x \in \mathrm{Z})$ ، جزء صحیح آن با خودش برابر است. به عنوان مثال: $[۳] = ۳\,, [-۴] = -۴$

ب) اگر x عددی غیر صحیح باشد $(x \notin \mathrm{Z})$ ، ابتدا دقت می کنیم که عدد x ، بین کدام **دو عدد صحیح متوالی** قرار دارد. پس از یافتن آن دو عدد، جزء صحیح x برابر **عدد صحیح کوچک تر** است.

مثال: $۳ < ۳/۶ < ۴ \Rightarrow [۳/۶] = ۳$ $\qquad -۹ < -۸/۲ < -۸ \Rightarrow [-۸/۲] = -۹$

نکته: می توان هر عدد حقیقی x را به دو قسمت جزءصحیح $([x])$و جزء کسری یا اعشاری$(\boldsymbol{\alpha})$ به صورت زیر تقسیم نمود:

$$x = [x] + \alpha \quad ; ۰ \leq \alpha < ۱$$

به عنوان مثال:

$$\underbrace{-۳/۷ = -۴}_{\text{جزء صحیح}} + \underbrace{۰/۳}_{\text{جزء اعشاری}}$$

$$۵/۲۳ = \underbrace{۵}_{\text{جزء صحیح}} + \underbrace{۰/۲۳}_{\text{جزء اعشاری}}$$

تابع جزء صحیح:

تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح نام دارد.

تابع جزء صحیح x را به صورت $y = f(x) = [x]$ نشان می دهیم. دامنه ی این تابع R و برد آن Z است.

ویژگی های تابع جزء صحیح:

$$۱)\ [x] = n \overset{n\in Z}{\Longleftrightarrow} n \le x < n + ۱$$

$$۲)\ [x] \le x < [x] + ۱ \Leftrightarrow [x] - [x] \le x - [x] < [x] - [x] + ۱ \Leftrightarrow ۰ \le x - [x] < ۱$$

$$۳) if\ \boldsymbol{k} \in Z \Rightarrow [x \pm k] = [x] \pm k\ ;$$

اثبات: برای هر $x \in R$ داریم:

$$[x] = n\ ; n \in Z \xRightarrow{\text{ویژگی ۱}} n \le x < n + ۱ \xRightarrow{\text{طرفین به علاوه ی } (k\in Z) k} n + k \le x + k < n + k + ۱$$

$$\xRightarrow{n+k\in Z} [n + k] = n + k \xRightarrow{n=[x]} [x + k] = [x] + k$$

$$۴)\ \big[x + k[x]\big] = [x] + k[x] \qquad \Longrightarrow \begin{cases} \big[x + [x]\big] = [x] + [x] = ۲[x] \\ \\ \big[x - [x]\big] = [x] - [x] = ۰ \end{cases}$$

$$۵)\ [x]+[-x]=\begin{cases} \cdot & ;if\ x\in Z \\ -۱ & ;if\ x\notin Z \end{cases}$$

اثبات:

حالت اول: اگر $x \in \mathrm{Z}$:

در این حالت چون x عددی صحیح می باشد، $-x$ نیز عدد صحیح بوده و بنابراین جزء صحیح آن ها با خودشان برابر است.

$$\begin{cases} [x]=x \\ [-x]=-x \end{cases} \Rightarrow [x]+[-x]=x+(-x)=x-x=\cdot$$

حالت دوم: اگر $x \notin \mathrm{Z}$:

در این حالت چون x عددی صحیح نمی باشد، پس عدد صحیحی مانند n وجود دارد به طوری که: $n<x<n+۱$.

$$n<x<n+۱ \Rightarrow [x]=n(\mathrm{I})$$

از طرفی:

$$n<x<n+۱ \xRightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می شود.}]{\text{طرفین ضرب در } -۱} -n>-x>-n-۱ \overset{\text{یا}}{\Rightarrow} -n-۱<-x<-n$$

$$\Rightarrow (-n-۱)<-x<(-n{\color{red}-۱}){\color{red}+۱} \Rightarrow [-x]=-n-۱(\mathrm{II})$$

$$\xRightarrow{(\mathrm{I})\text{و}(\mathrm{II})} [x]+[-x]=n+(-n-۱)=-۱$$

$$۶)\ [-x]=\begin{cases} -[x] & ;x\in Z \\ -۱-[x] & ;x\notin Z \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = [-x+۴] + [x+۲]$ و $x \notin \mathrm{Z}$ باشد، نشان دهید $f(x) = ۵$.

حل:

$$f(x) = [-x+۴] + [x+۲] \xrightarrow[]{\text{ویژگی } ۲,۴\in Z \Rightarrow ۴} f(x) = [-x] + ۴ + [x] + ۲ \Rightarrow f(x) = [x] + [-x] + ۶$$

$$\xrightarrow{x\notin \mathrm{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-۱} f(x) = -۱ + ۶ \Rightarrow f(x) = ۵$$

تمرین: اگر $f(x) = [x+۲] + [-x]$ و $x \notin \mathrm{Z}$ باشد، نشان دهید $f(x) = ۱$.

مثال: اگر $n \in \mathrm{N}$ آن گاه با استفاده از نامساوی های $۴n^۲ < ۴n^۲ + ۲n + ۱ < ۴n^۲ + ۴n + ۱$ نشان دهید:

$$\left[\sqrt{۴n^۲ + ۲n + ۱}\right] = ۲n$$

حل: با توجه به نامساوی داده شده داریم:

$$۴n^۲ < ۴n^۲ + ۲n + ۱ < ۴n^۲ + ۴n + ۱ \Rightarrow (۲n)^۲ < ۴n^۲ + ۲n + ۱ < \underbrace{(۲n)^۲ + ۲(۲n)(۱) + ۱^۲}_{\text{اتحاد مربع مجوع دو جمله}}$$

$$\Rightarrow (۲n)^۲ < ۴n^۲ + ۲n + ۱ < (۲n+۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر از طرفین نامساوی}} \sqrt{(۲n)^۲} < \sqrt{۴n^۲ + ۲n + ۱} < \sqrt{(۲n+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲n < \sqrt{۴n^۲ + ۲n + ۱} < ۲n + ۱ \xrightarrow{۲n\in Z} \left[\sqrt{۴n^۲ + ۲n + ۱}\right] = ۲n$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x-۱]=۶$

$$[x-۱]=۶\xRightarrow{\text{ویژگی ۳ جزء صحیح}}[x]-۱=۶\Rightarrow[x]=۷\xRightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}}۷\le x<۸$$

ب) $[۳x-۱]=۱$

$$[۳x-۱]=۱\xRightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}}۱\le ۳x-۱<۲\xRightarrow{\text{طرفین نامساوی بعلاوه ی ۱}}۱+۱\le ۳x-۱+۱<۲+۱$$

$$\Rightarrow ۲\le ۳x<۳\xRightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر ۳}}\frac{۲}{۳}\le x<۱$$

ج) $\big[x+۳[x]\big]=۸$

$$\big[x+۳[x]\big]=۸\xRightarrow{\text{نتیجه ویژگی ۴}}[x]+۳[x]=۸\Rightarrow ۴[x]=۸\Rightarrow[x]=۲\xRightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}}۲\le x<۳$$

د) $[۱-۲x]=-۵$

$$[۱-۲x]=-۵\xRightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}}-۵\le ۱-۲x<-۴\xRightarrow{\text{طرفین نامساوی بعلاوه ی ۱}}-۵-۱\le ۱-۲x-۱<-۴-۱$$

$$\Rightarrow -۶\le -۲x<-۵\xRightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می شود.}]{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر ۲-}}\frac{-۶}{-۲}\ge\frac{-۲x}{-۲}<\frac{-۵}{-۲}\Rightarrow ۲/۵<x\le ۳$$

مثال: نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه ی $[-۲, ۲]$ رسم کنید.

حل: بازه ی داده شده را به تعدادی زیر بازه به صورت زیر تقسیم می کنیم به طوری که ابتدا و انتهای هر زیربازه دو عدد صحیح متوالی باشند.

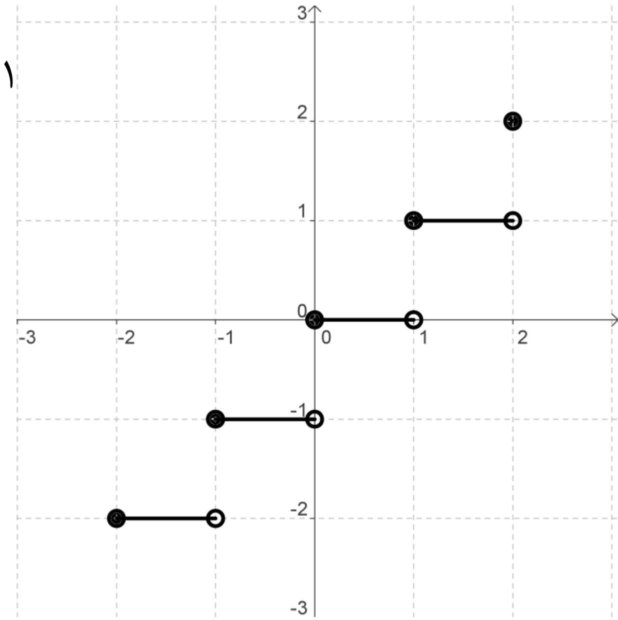
$$[-۲,-۱) \Rightarrow [x] = -۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۱ \Rightarrow y = -۲$$

$$[-۱,۰) \Rightarrow [x] = -۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = -۱ \Rightarrow -۱ \le x < ۰ \Rightarrow y = -۱$$

$$[۰,۱) \Rightarrow [x] = ۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = ۰ \Rightarrow ۰ \le x < ۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$[۱,۲) \Rightarrow [x] = ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = ۱$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۲$$



مثال: نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار این تابع، مجموعه ی اعداد حقیقی را به زیربازه هایی تقسیم می کنیم که ابتدا و انتهای بازه ها اعداد صحیح متوالی باشند. به عنوان مثال در بازه ی فرضی $[n, n+۱)$ داریم $[x] = n$ و در نتیجه ضابطه ی تابع به شکل $y = x + n$ در می آید و کافی است نمودار این تابع (که یک خط می باشد) را با استفاده از نقطه یابی در بازه ی $[n, n+۱)$ رسم کنیم.

$$\vdots$$

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (-۲) \Rightarrow y = x + ۲$$

x	-۲	-۱
y	۰	۱

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \xRightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (-۱) \Rightarrow y = x + ۱$$

x	-۱	۰
y	۰	۱

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \xRightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (۰) \Rightarrow y = x$$

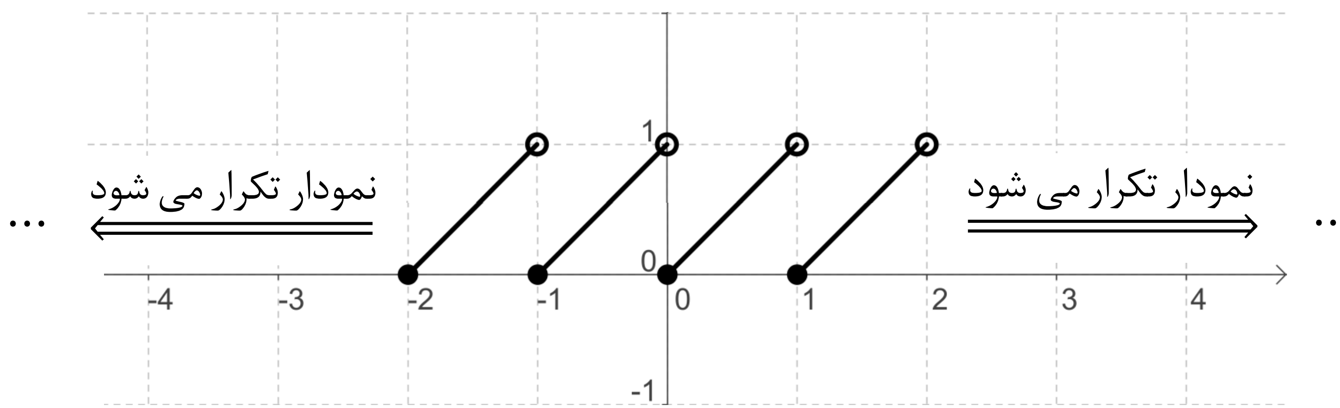
x	۰	۱
y	۰	۱

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \xRightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (+۱) \Rightarrow y = x - ۱$$

x	۱	۲
y	۰	۱

$\vdots$

حال خطوط به دست آمده را در زیربازه های مربوط به خودشان، رسم می کنیم. دقت کنید که شیب تمام خطوط برابر با یک می باشد. پس تمامی خطوط با هم موازی هستند.



نکته: چون در هر زیر بازه ی $[n, n + ۱)$ انتهای زیربازه یعنی $x = n + ۱$ متعلق به آن زیربازه نمی باشد، لذا هنگام رسم، نقاط انتهایی در هر زیربازه را توخالی رسم کرده ایم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{x}{۳}\right]$ را در بازه ی $[-۶,۶]$ رسم کنید.

حل: در این گونه موارد با توجه به **بازه ی داده شده**، عبارت **درون جزء صحیح** را تشکیل می دهیم.

$$-۶ \le x \le ۶ \xRightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر ۳}} -۲ \le \frac{x}{۳} \le ۲$$

حال باید بازه ی به دست آمده را به چند زیربازه تقسیم می کنیم به طوری که تابع $f(x)=\left[\frac{x}{۳}\right]$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد.

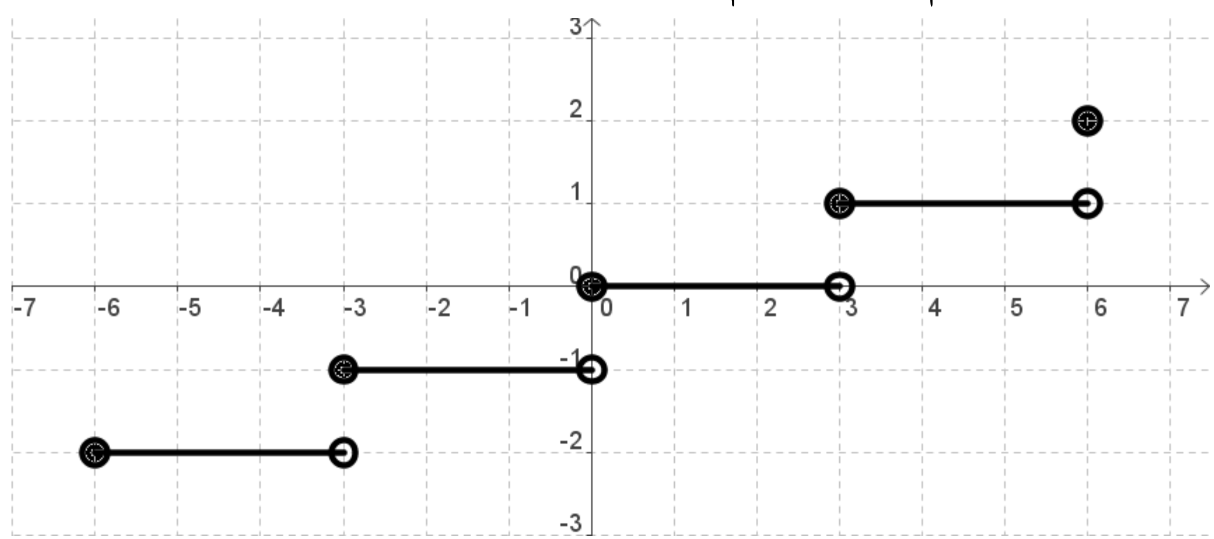
$$-۲ \le \frac{x}{۳} < -۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = -۲\,;\,(-۶ \le x < -۳ \Rightarrow y = -۲)$$

$$-۱ \le \frac{x}{۳} < ۰ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = -۱\,;\,(-۳ \le x < ۰ \Rightarrow y = -۱)$$

$$۰ \le \frac{x}{۳} < ۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = ۰\,;\,(۰ \le x < ۳ \Rightarrow y = ۰)$$

$$۱ \le \frac{x}{۳} < ۲ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = ۱\,;\,(۳ \le x < ۶ \Rightarrow y = ۱)$$

$$\frac{x}{۳} = ۲ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = ۲\,;\,(x = ۶ \Rightarrow y = ۲)$$

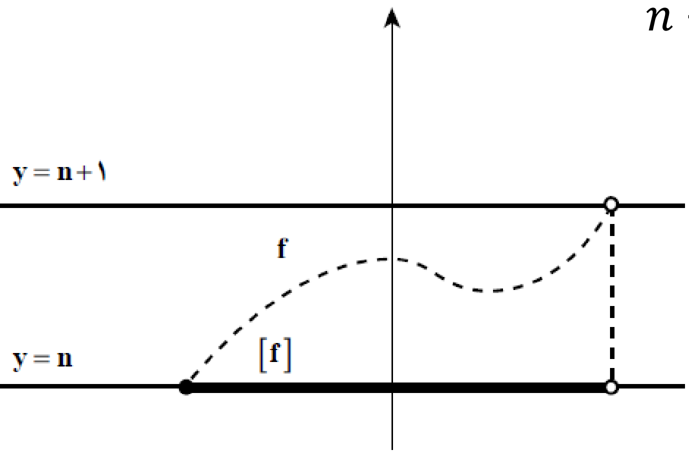


رسم نمودار $y = [f(x)]$ **:**

مرحله ی اول: تابع درون جزء صحیح $(f(x))$ را رسم می کنیم.

مرحله ی دوم: خطوط افقی $\dots, y = ۲, y = ۱, y = ۰, y = -۱, y = -۲, \dots$ را رسم کرده، جاهایی که این خطوط با نمودار تابع $f(x)$ برخورد دارند را نقاط **توپر** در نظر می گیریم.

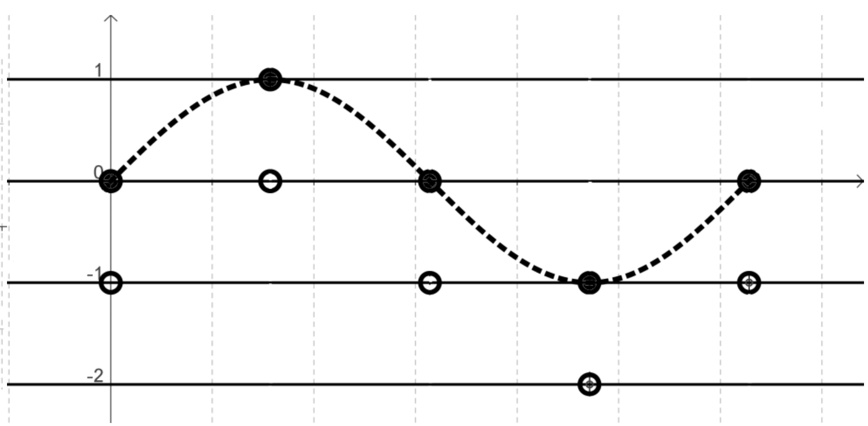
هم چنین تصویر این نقاط توپر را روی **خط پایینی** به صورت نقاط **توخالی** در نظر می گیریم.

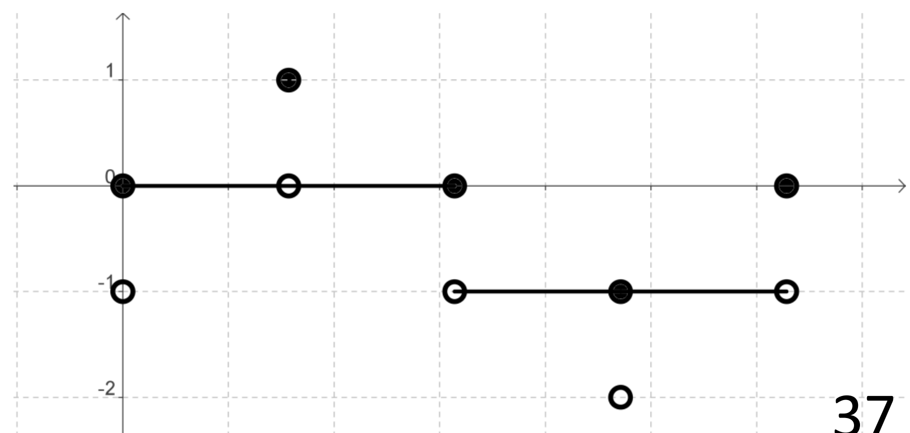


مرحله ی سوم: با توجه به اینکه اگر $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی n و $n + ۱$ قرار گیرد آن گاه داریم: $[f(x)] = n$

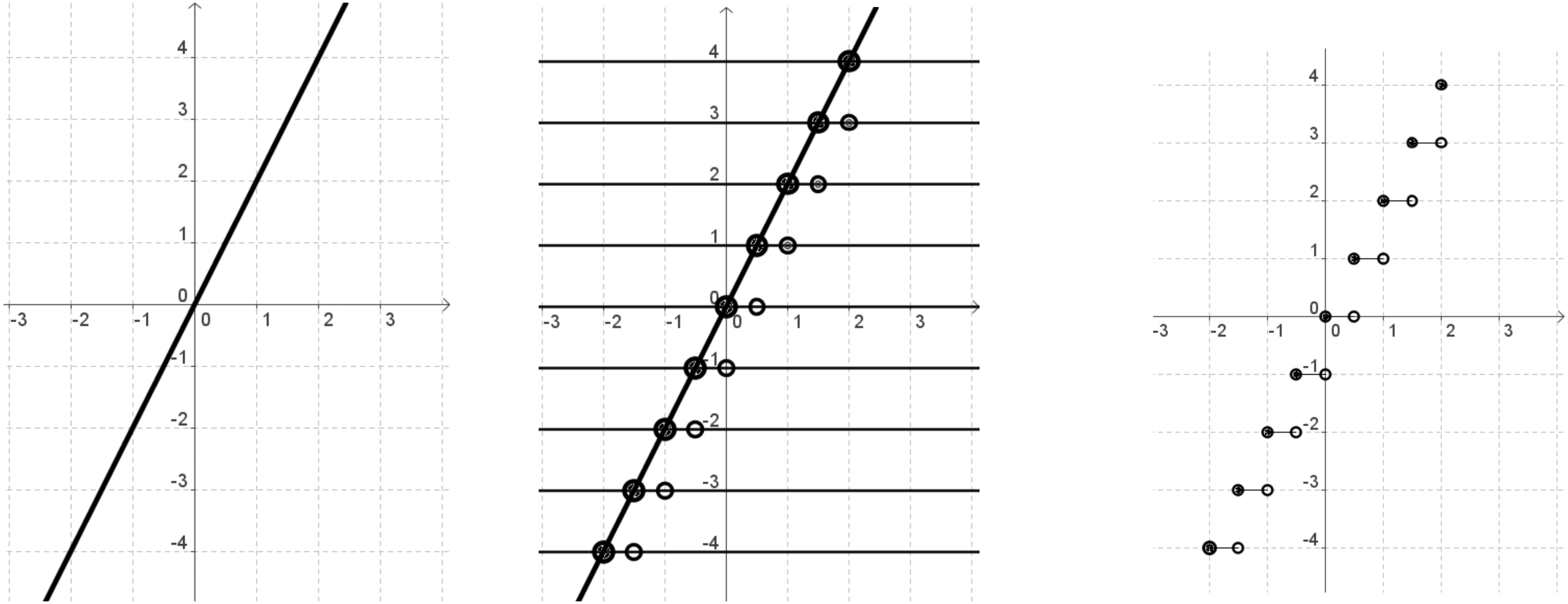
هنگام رسم $[f(x)]$ مطابق شکل، قسمت هایی از نمودار $f(x)$ که بین دو خط $y = n$ و $y = n + ۱$ قرار می گیرند را حذف کرده و به جای آن تصویر نمودار $f(x)$ را روی خط پایینی $(y = n)$ رسم می کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = [sinx]$ را رسم کنید.

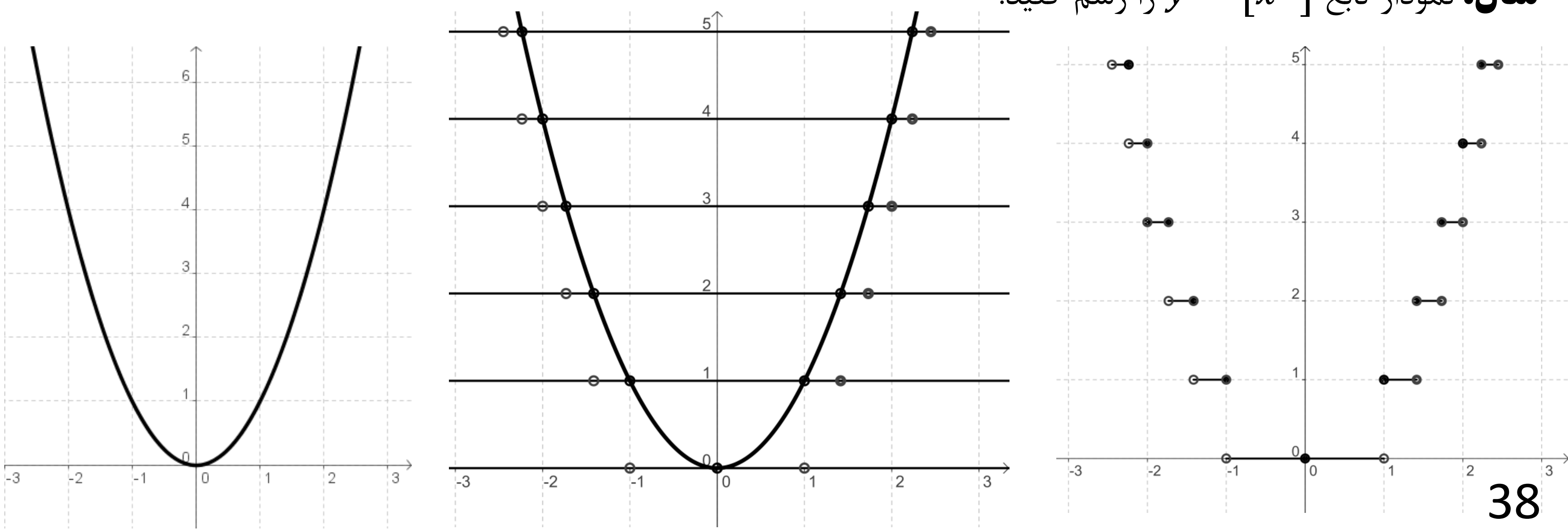




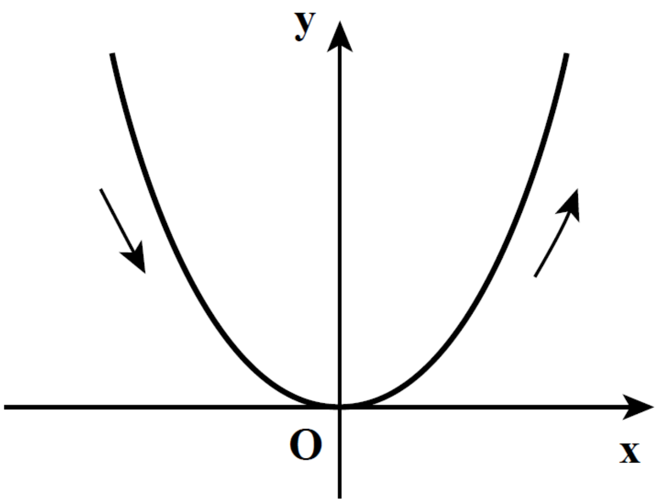
مثال: نمودار تابع $y = [۲x]$ را رسم کنید.



مثال: نمودار تابع $y = [x^{۲}]$ را رسم کنید.



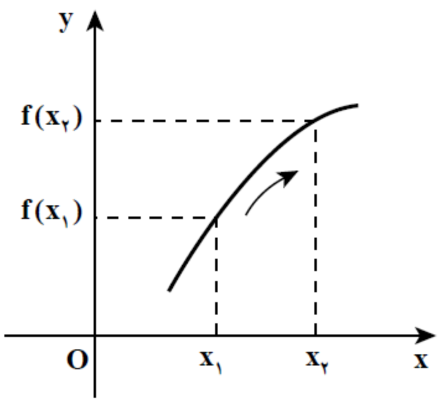
توابع صعودی و نزولی



اگر به نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$ توجه کنید، دیده می شود که
روی بازه ی $[۰, +\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش می یابند.
در این حالت گوییم تابع در حال **صعود** است.

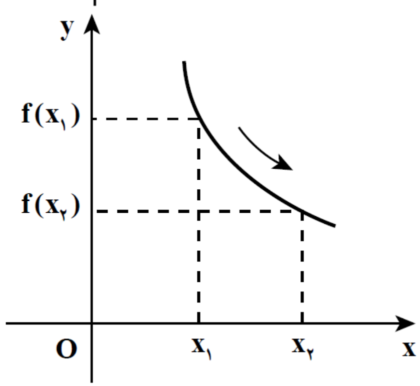
اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty, ۰]$ نگاه کنیم، می بینیم که
با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ کاهش می یابد.
در این حالت گوییم تابع در حال **نزول** است.

تعریف



به طور کلی، اگر **D بازه ای در دامنه ی تابع f** باشد، گوییم f در بازه ی D **صعودی** است هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{D}$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$



و گوییم f در بازه ی D **نزولی** است هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{D}$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۲) \leq f(x_۱)$$

نکته: توابع ثابت هم صعودی محسوب می شوند هم نزولی.

توابع اکیدا صعودی:

توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیدا صعودی می نامند.

یک تابع f روی بازه D اکیدا صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{D}$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

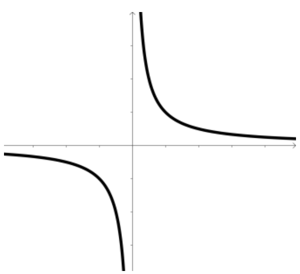
توابع اکیدا نزولی:

هم چنین توابع یک به یک و نزولی را توابع اکیدا نزولی می نامند.

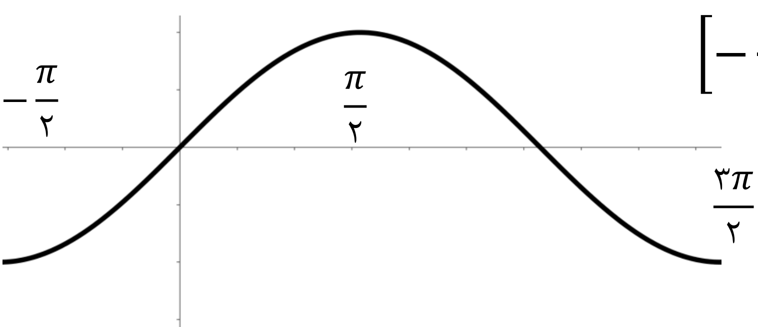
یک تابع f روی بازه D اکیدا نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{D}$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)$$

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x) = x^۲$ دیده می شود که این تابع روی بازه ی $(-\infty, ۰]$ اکیدا نزولی و روی $[۰, +\infty)$ اکیدا صعودی است.



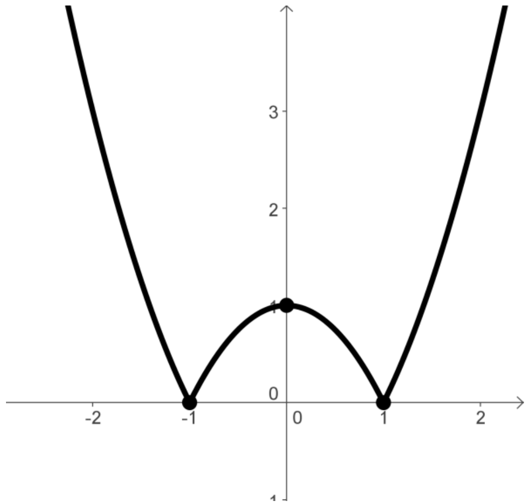
مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ نشان می دهد که این تابع روی بازه های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ اکیدا نزولی است. اما روی $\mathrm{R} - \{۰\}$ نه صعودی و نه نزولی است.



مثال: نمودار تابع $y = sinx$ نشان می دهد که این تابع روی بازه ی $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ اکیدا صعودی و روی بازه ی $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ اکیدا نزولی است.

مثال: نمودار تابع $y=\left|x^{۲}-۱\right|$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای تابع صعودی و در چه بازه ای تابع نزولی است؟

حل:



با توجه به نمودار، تابع در بازه های $(-\infty,-۱]$ و $[۰,۱]$ اکیدا نزولی و در بازه های $[-۱,۰]$ و $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است.

البته این تابع به طور کلی نه صعودی است و نه نزولی.

ترکیب توابع:

اگر x تحت اثر تابع g به $\mathrm{g}(x)$تبدیل شود و $\mathrm{g}(x)$ تحت اثر تابع f به $f(\mathrm{g}(x))$ تبدیل شود، آن گاه تابعی وجود دارد که مستقیما x را به $f(\mathrm{g}(x))$ تبدیل می کند. این تابع را $fo\mathrm{g}$ می نامیم.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\mathrm{g}"] \arrow[rr, bend right, "fo\mathrm{g}"'] & \mathrm{g}(x) \arrow[r, bend left, "f"] & f(\mathrm{g}(x)) \end{tikzcd}$$

به طور کلی اگر دو تابع g و f به گونه ای باشند که برای هر x در دامنه ی g مقدار $\mathrm{g}(x)$ در دامنه ی f قرار گیرد، آن گاه می توانیم مقدار $f(\mathrm{g}(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم و آن را با $fo\mathrm{g}$ نشان دهیم.

در این صورت دامنه ی $fo\mathrm{g}$ زیرمجموعه ی دامنه ی g خواهد بود و برای هر $x \in \mathrm{D_g}$ داریم: $fo\mathrm{g}(x) = f(\mathrm{g}(x))$

مثال: اگر $f = \{(۲,۱), (۶,۳), (۵, -۲), (۱۱,۷)\}$ و $\mathrm{g} = \{(۰,۱), (-۱,۲), (۱۱,۵), (۹,۶)\}$، آنگاه $fo\mathrm{g}$ را بیابید.

حل: می دانیم: $\mathrm{D}_{fo\mathrm{g}} \subseteq \mathrm{D_g}$.

$$\begin{cases} \mathrm{R_g} = \{۱,۲,۵,۶\} \\ \mathrm{D}_f = \{۲,۶,۵,۱۱\} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \Rightarrow fo\mathrm{g}(۰) = f\big(\mathrm{g}(۰)\big) = f(۱) = \text{تعریف نشده} \\ x = -۱ \Rightarrow fo\mathrm{g}(-۱) = f\big(\mathrm{g}(-۱)\big) = f(۲) = ۱ \Rightarrow (-۱,۱) \in fo\mathrm{g} \\ x = ۱۱ \Rightarrow fo\mathrm{g}(۱۱) = f\big(\mathrm{g}(۱۱)\big) = f(۵) = -۲ \Rightarrow (۱۱,-۲) \in fo\mathrm{g} \\ x = ۹ \Rightarrow fo\mathrm{g}(۹) = f\big(\mathrm{g}(۹)\big) = f(۶) = ۳ \Rightarrow (۹,۳) \in fo\mathrm{g} \end{array}\right\} \Rightarrow fo\mathrm{g} = \{(-۱,۱), (۱۱,-۲), (۹,۳)$$

مثال: اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=x^۲+۵$ آن گاه توابع fog و gof را به دست آورید.

حل: $D_f=R, R_g=R \Rightarrow D_f \cap R_g \neq \emptyset \Rightarrow$ fog وجود دارد

$$fog(x)=f(g(x))=f(x^۲+۵)=۲(x^۲+۵)-۳=۲x^۲+۱۰-۳ \Rightarrow fog(x)=۲x^۲+۷$$

$D_g=R, R_f=R \Rightarrow D_g \cap R_f \neq \emptyset \Rightarrow$ gof وجود دارد

$$gof(x)=g(f(x))=g(۲x-۳)=(۲x-۳)^۲+۵=۴x^۲-۱۲x+۹+۵$$
$$\Rightarrow gof(x)=۴x^۲-۱۲x+۱۴$$

مثال: اگر $f(x)=۲x-۱$ و $fog(x)=x^۳$ آن گاه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} fog(x)=x^۳ \Rightarrow f(g(x)=x^۳ \\ f(x)=۲x-۱ \Rightarrow f(g(x))=۲g(x)-۱ \end{cases} \Rightarrow ۲g(x)-۱=x^۳ \Rightarrow ۲g(x)=x^۳+۱ \Rightarrow g(x)=\frac{x^۳+۱}{۲}$$

مثال: برای توابع $f(x)=۳x^۲+۲$ ، $g(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $k(x)=۳^x+۱$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

الف) $fog(x)$ ب) $fogok(x)$

حل:

الف) $fog(x)=f(g(x)) \xlongequal{g(x)=\frac{۲}{x-۱}} f\left(\frac{۲}{x-۱}\right) \xlongequal{\text{جایگذاری } \frac{۲}{x-۱} \text{ به جای } x \text{ در } f(x)} ۳\left(\frac{۲}{x-۱}\right)^۲+۲$

$$\Rightarrow fog(x)=\frac{۱۲}{(x-۱)^۲}+۲$$

ب) $fogok(x) = f(g(k(x))) \xlongequal{k(x)=۳^x+۱} f(g(۳^x+۱) \xlongequal{\text{جایگذاری } ۳^x+۱ \text{ به جای } x \text{ در } g(x)} f(\frac{۲}{(۳^x+۱)-۱})$

$$= f(\frac{۲}{۳^x}) \xlongequal{\text{جایگذاری } \frac{۲}{۳^x} \text{ به جای } x \text{ در } f(x)} ۳\left(\frac{۲}{۳^x}\right)^۲ + ۲ = ۳ \times \frac{۲^۲}{(۳^x)^۲} + ۳ = \frac{۱۲}{۳^{۲x}} + ۲ = ۱۲ \times ۳^{۲x} + ۲$$

دامنه ی توابع مرکب:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} \qquad D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} \qquad D_{fof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_f\}$$

مثال: برای دو تابع $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$ دامنه ی توابع fog و gof را محاسبه کنید.

حل: می دانیم $D_f = R$ و $D_g = [۰, +\infty)$. در این صورت طبق تعریف داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [۰, +\infty) | \sqrt{x} \in R\} = \{(x \in [۰, +\infty)) \cap (x \in [۰, +\infty))\}$$
$$= [۰, +\infty)$$
$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in R | x - ۱ \in [۰, +\infty)\} = \{x \in R | x - ۱ \geq ۰\} = \{x \in R \cap x \geq ۱\}$$
$$= \{x \geq ۱\} = [۱, +\infty)$$

تمرین: اگر $f(x) = ۳x + ۱$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x}$ آن گاه دامنه ی تابع gof را به دست آورده و آن را محاسبه کنید.

تمرین: اگر $f(x) = ۱ - \sqrt{x}$ آن گاه دامنه ی تابع fof را به دست آورده و آن را محاسبه کنید.

تابع یک به یک $(One-To-One)$**:**

تابع $y=f(x)$ را یک به یک می گوییم هرگاه برای هر $x_۱,x_۲\in D_f$ از $f(x_۱)=f(x_۲)$ بتوان نتیجه گرفت: $x_۱=x_۲$

به بیان دیگر: $\forall x_۱,x_۲\in D_f; f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲$

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بررسی کنید.

حل:

$$f(x_۱)=\frac{۱}{x_۱} \qquad f(x_۲)=\frac{۱}{x_۲}$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}=\frac{۱}{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

از تساوی $f(x_۱)=f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱=x_۲$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(R-\{۰\})$ یک به یک می باشد.

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x)=x^۳+۴$ را بررسی کنید.

حل:

$$f(x_۱)={x_۱}^۳+۴ \qquad f(x_۲)={x_۲}^۳+۴$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow {x_۱}^۳+۴={x_۲}^۳+۴\Rightarrow {x_۱}^۳={x_۲}^۳\Rightarrow \sqrt[۳]{{x_۱}^۳}=\sqrt[۳]{{x_۲}^۳}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

از تساوی $f(x_۱)=f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱=x_۲$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک می باشد.

مثال: یک به یک بودن تابع $y = f(x) = ۲x^۲ - ۵$ را بررسی کنید.

حل:

$$f(x_۱) = ۲x_۱{}^۲ - ۵ \qquad f(x_۲) = ۲x_۲{}^۲ - ۵$$

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow ۲x_۱{}^۲ - ۵ = ۲x_۱{}^۲ - ۵ \Rightarrow ۲x_۱{}^۲ = ۲x_۲{}^۲ \Rightarrow x_۱{}^۲ = x_۲{}^۲ \Rightarrow \sqrt{x_۱{}^۲} = \sqrt{x_۲{}^۲} \Rightarrow$$

$$|x_۱| = |x_۲| \Rightarrow x_۱ = \pm x_۲$$

از تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱ = \pm x_۲$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک نیست.

تابع وارون (تابع معکوس):

تابع f دارای تابع وارون است اگر برای هر y در برد تابع f ، x ی منحصر بفرد در دامنه ی تابع f وجود داشته باشد به طوری که:

$f(x) = y$ به عبارت دیگر تابع f دارای تابع وارون است اگر یک به یک باشد.

روش به دست آوردن تابع وارون (تابع معکوس):

برای این کار ابتدا یک به یک بودن تابع را ثابت می کنیم. پس از آن با استفاده از عملیات ریاضی مانند: طرفین وسطین، ضرب پرانتزها، ساده کردن عبارت های جبری، ریشه گیری، توان رسانی، فاکتورگیری و ... x را برحسب y به دست می آوریم. و در آخر جای x و y را با هم عوض می کنیم.

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = ۲x - ۴$ را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن: $f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow ۲x_۱ - ۴ = ۲x_۲ - ۴ \Rightarrow ۲x_۱ = ۲x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$

از تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱ = x_۲$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = ۲x - ۴ \Rightarrow ۲x = y + ۴ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(y + ۴) \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{۱}{۲}(x + ۴) \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}(x + ۴)$$

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = \frac{۱}{x^{۳}}$ را به دست آورید.

حل: **بررسی یک به یک بودن:** $f(x_{۱}) = f(x_{۲}) \Rightarrow \frac{۱}{{x_{۱}}^{۳}} = \frac{۱}{{x_{۲}}^{۳}} \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$

از تساوی $f(x_{۱}) = f(x_{۲})$ نتیجه گرفتیم: $x_{۱} = x_{۲}$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(\mathrm{R} - \{۰\})$ یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{۱}{x^{۳}} \Rightarrow x^{۳} = \frac{۱}{y} \Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{y}} \Rightarrow x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{y}} \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$$

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$ را به دست آورید.

حل: **بررسی یک به یک بودن:**

$$f(x_{۱}) = f(x_{۲}) \Rightarrow \frac{۲x_{۱} + ۱}{x_{۱} - ۱} = \frac{۲x_{۲} + ۱}{x_{۲} - ۱} \Rightarrow (۲x_{۱} + ۱)(x_{۲} - ۱) = (۲x_{۲} + ۱)(x_{۱} - ۱)$$

$$\Rightarrow ۲x_{۱}x_{۲} - ۲x_{۱} + x_{۲} - ۱ = ۲x_{۱}x_{۲} - ۲x_{۲} + x_{۱} - ۱ \Rightarrow -۲x_{۱} - x_{۱} = -۲x_{۲} - x_{۲} \Rightarrow -۳x_{۱} = -۳x_{۲}$$

$$\Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$$

از تساوی $f(x_{۱}) = f(x_{۲})$ نتیجه گرفتیم: $x_{۱} = x_{۲}$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(\mathrm{R} - \{۱\})$ یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \Rightarrow y(x - ۱) = ۲x + ۱ \Rightarrow yx - y = ۲x + ۱ \Rightarrow yx - ۲x = ۱ + y$$

$$\xRightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(y - ۲) = ۱ + y \Rightarrow x = \frac{y + ۱}{y - ۲} \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{x + ۱}{x - ۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲}$$

مثال: وارون پذیری تابع چندضابطه ای زیر را بررسی کرده و تابع وارون آن را به دست آورید.

$$y = f(x) = \begin{cases} ۲ + x^{۲} \, ; x \geq ۰ \\ -x^{۲} + ۱ \, ; x < ۰ \end{cases}$$

حل: بررسی یک به یک بودن:

$$x_۱, x_۲ \geq ۰; f(x_۱) = f(x_۱) \Rightarrow ۲ + {x_۱}^{۲} = ۲ + {x_۲}^{۲} \Rightarrow {x_۱}^{۲} = {x_۲}^{۲} \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{{x_۱}^{۲}} = \sqrt{{x_۲}^{۲}} \Rightarrow$$
$$|x_۱| = |x_۲| \xRightarrow{x_۱, x_۲ \geq ۰} x_۱ = x_۲$$

$$x_۱, x_۲ < ۰; f(x_۱) = f(x_۱) \Rightarrow -{x_۱}^{۲} + ۱ = -{x_۲}^{۲} + ۱ \Rightarrow -{x_۱}^{۲} = -{x_۲}^{۲} \Rightarrow {x_۱}^{۲} = {x_۲}^{۲} \xRightarrow{\text{ریشه گیری}}$$
$$\sqrt{{x_۱}^{۲}} = \sqrt{{x_۲}^{۲}} \Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \xRightarrow{x_۱, x_۲ < ۰} -x_۱ = -x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

از تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱ = x_۲$ بنابراین تابع چندضابطه ای بالا در دامنه هایش یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = ۲ + x^{۲} \xRightarrow{x \geq ۰} y - ۲ = x^{۲} \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x^{۲}} = \sqrt{y - ۲} \Rightarrow |x| = \sqrt{y - ۲} \xRightarrow{x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x} x = \sqrt{y - ۲}$$
$$\xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt{x - ۲}$$

$$y = -x^{۲} + ۱ \xRightarrow{x < ۰} y - ۱ = x^{۲} \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x^{۲}} = \sqrt{y - ۱} \Rightarrow |x| = \sqrt{y - ۱} \xRightarrow{x < ۰ \Rightarrow |x| = -x} -x = \sqrt{y - ۱}$$
$$\Rightarrow x = -\sqrt{y - ۱} \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = -\sqrt{x - ۱}$$

تا اینجا توانستیم ضابطه های تابع وارون را به دست آوریم. حال برای نوشتن تابع وارون تابع f ، نیازمند دامنه ی هر یک از ضابطه های حساب شده نیز هستیم.

می دانیم دامنه ی تابع وارون برابر برد تابع f است. پس برد هر یک از ضابطه های را به دست آورده و آن ها را به عنوان دامنه ی تابع وارون در نظر می گیریم.

$$x \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۲ + x^۲ \geq ۲ \Rightarrow y \geq ۲$$

$$x < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۰ \Rightarrow -x^۲ < ۰ \Rightarrow ۱ - x^۲ < ۱ \Rightarrow y < ۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-۲}\,; x \geq ۲ \\ -\sqrt{x-۱}\,; x < ۱ \end{cases}$$

مثال: معکوس پذیری تابع $y = f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۲$ را بررسی کرده و سپس تابع معکوس آن را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن:

$$y = f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ - ۱ \Rightarrow y = f(x) = (x-۱)^۳ - ۱$$

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow (x_۱ - ۱)^۳ - ۱ = (x_۲ - ۱)^۳ - ۱ \Rightarrow (x_۱ - ۱)^۳ = (x_۲ - ۱)^۳ \xRightarrow{\text{ریشه گیری}}$$

$$\sqrt[۳]{(x_۱ - ۱)^۳} = \sqrt[۳]{(x_۲ - ۱)^۳} \Rightarrow x_۱ - ۱ = x_۲ - ۱ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

از تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱ = x_۲$ بنابراین تابع چندضابطه ای بالا در دامنه هایش یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = (x-۱)^۳ - ۱ \Rightarrow y + ۱ = (x-۱)^۳ \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt[۳]{y+۱} = \sqrt[۳]{(x-۱)^۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{y+۱} = x - ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{y+۱} + ۱ = x \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y+۱} + ۱ \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt[۳]{x+۱} + ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+۱} + ۱$$

مثال: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{۱ - ۳^x}{۱ + ۳^x}$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

حل: همانطور که می دانیم، تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد. اثبات یک به یک بودن:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{۱ - ۳^{x_۱}}{۱ + ۳^{x_۱}} = \frac{۱ - ۳^{x_۲}}{۱ + ۳^{x_۲}} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} (۱ - ۳^{x_۱})(۱ + ۳^{x_۲}) = (۱ + ۳^{x_۱})(۱ - ۳^{x_۲})$$

$$\xRightarrow{\text{ضرب پرانتزها}} ۱ \times ۱ + ۱ \times ۳^{x_۲} + (-۳^{x_۱}) \times ۱ + (-۳^{x_۱})(۳^{x_۲}) = ۱ \times ۱ + ۱ \times (-۳^{x_۲}) + (۳^{x_۱}) \times ۱ + (۳^{x_۱})(-۳^{x_۲})$$

$$\Rightarrow ۱ + ۳^{x_۲} - ۳^{x_۱} - ۳^{x_۱ + x_۲} = ۱ - ۳^{x_۲} + ۳^{x_۱} - ۳^{x_۱ + x_۲} \Rightarrow -۲ \times ۳^{x_۱} = -۲ \times ۳^{x_۲} \Rightarrow ۳^{x_۱} = ۳^{x_۲} \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

از تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه گرفتیم: $x_۱ = x_۲$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{۱ - ۳^x}{۱ + ۳^x} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} y(۱ + ۳^x) = ۱ - ۳^x \Rightarrow y + y۳^x = ۱ - ۳^x \Rightarrow y + ۱ = -۳^x - y۳^x$$

$$\xRightarrow{\text{فاکتورگیری}} y + ۱ = ۳^x(-۱ - y) \Rightarrow ۳^x = \frac{y + ۱}{-۱ - y} \xRightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می گیریم}} \log^{۳^x} = \log^{\frac{y+۱}{-۱-y}}$$

$$\Rightarrow x \log^{۳} = \log^{\frac{y+۱}{-۱-y}} \Rightarrow x = \frac{\log^{\frac{y+۱}{-۱-y}}}{\log^{۳}} \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{\log^{\frac{x+۱}{-۱-x}}}{\log^{۳}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{\log^{\frac{x+۱}{-۱-x}}}{\log^{۳}}$$

تست: اگر $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = x - ۱$ ، ضابطه ی $fog^{-۱}$ کدام است؟ سراسری ۷۵

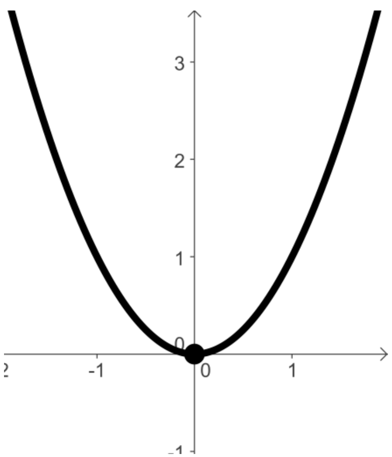
۱) $۲x + ۱$ ۲) $۲x + ۲$ ۳) $۲x + ۳$ ۴) $۲x + ۴$

حل: ابتدا $g^{-۱}(x)$ را به دست می آوریم.

$$g(x) = x - ۱ \Rightarrow y = x - ۱ \Rightarrow y + ۱ = x \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} x + ۱ = y \Rightarrow g^{-۱}(x) = x + ۱$$

$$fog^{-۱}(x) = f\left(g^{-۱}(x)\right) = f(x + ۱) = ۲(x + ۱) + ۱ = ۲x + ۲ + ۱ = ۲x + ۳$$

پاسخ صحیح گزینه ی ۳ می باشد.



مثال: تابع معکوس تابع $y = x^۲$ را به دست آورید.

حل: با رسم نمودار این تابع متوجه می شویم که این تابع در دامنه اش(R)یک به یک نیست.

در نتیجه وارون پذیر نیست. اما برای وارون پذیر شدن باید دامنه ی تابع را محدود کرد.

بزرگ ترین بازه ای که تابع روی آن یک به یک می باشد، بازه ی $(-\infty, ۰]$ یا $[۰, +\infty)$ می باشد.

$$x \in [۰, +\infty) \Rightarrow y = x^۲ \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{y} = \sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \xRightarrow{x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x} \sqrt{y} = x \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y}$$
$\sqrt{x} = y$ یا $y = \sqrt{x}$

$$x \in (-\infty, ۰] \Rightarrow y = x^۲ \xRightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{y} = \sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \xRightarrow{x \leq ۰ \Rightarrow |x| = -x} \sqrt{y} = -x \Rightarrow -\sqrt{y} = x$$
$\xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} -\sqrt{x} = y$ یا $y = -\sqrt{x}$

تمرین: دامنه ی تابع $y = x^{۲} + ۲x$ را به گونه ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست آورید.

مثال: در تابع $y = \dfrac{ax + ۱}{x - c}$ آیا می توان a و c را طوری تعیین کرد که این تابع وارون خودش باشد؟

حل: ابتدا تابع وارون تابع بالا را به دست می آوریم:

$$y = \frac{ax + ۱}{x - c} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} y(x - c) = ax + ۱ \Rightarrow yx - yc = ax + ۱ \Rightarrow yx - ax = ۱ + yc$$

$$\xRightarrow{\text{فاکتورگیری از } x} x(y - a) = ۱ + yc \Rightarrow x = \frac{۱ + yc}{y - a} \xRightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{۱ + xc}{x - a} = \frac{xc + ۱}{x - a}$$

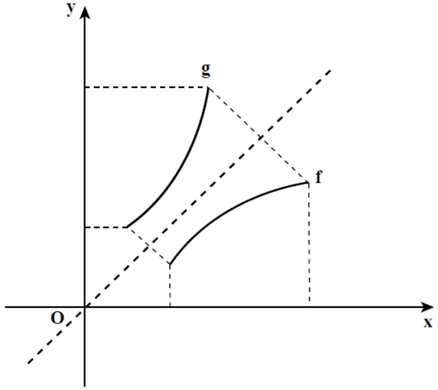
حال تابع را با وارونش مساوی هم قرار می دهیم:

$$\frac{ax + ۱}{x - c} = \frac{xc + ۱}{x - a} \Rightarrow a = c$$

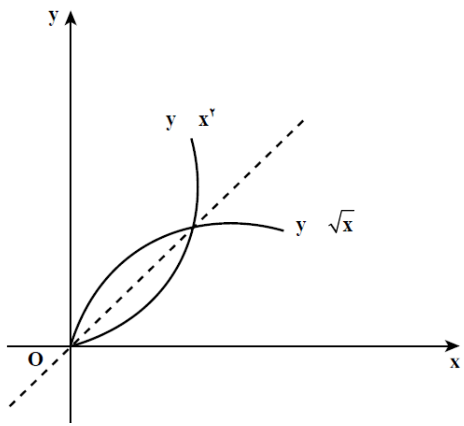
نکته: اگر $f^{-۱}$تابع وارون f باشد، f نیز تابع وارون $f^{-۱}$ است. $\left(\left(f^{-۱}\right)^{-۱} = f\right)$

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، دامنه ی f برابر برد g و دامنه ی g برابر برد f است.

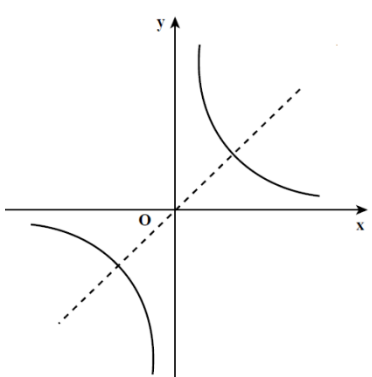
نکته: نمودارهای f و $f^{-۱}$ قرینه ی یکدیگر نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) است.



مثال: دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = x^{۲}$ با دامنه ی $[۰, +\infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال: تابع $y = \frac{۱}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



نکته: اگر دو تابع f با دامنه ی D_f و g با دامنه ی D_g وارون یکدیگر باشند در این صورت داریم:

$$\begin{cases} fog(x) = x \ ; x \in D_g \\ \\ gof(x) = x \ ; x \in D_f \end{cases}$$

یعنی ترکیب دو تابع وارون تابعی همانی است و بر عکس. یعنی اگر ترکیب دو تابع تابع همانی شود، آن دو تابع وارون یکدیگرند.

مثال: تابع $f(x) = \frac{۱}{x + ۱}$ با دامنه ی $R - \{-۱\}$ ، وارون تابع $g(x) = \frac{۱ - x}{x}$ با دامنه ی $R - \{۰\}$ است. زیرا:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{۱ - x}{x}\right) = \frac{۱}{\frac{۱ - x}{x} + ۱} = \frac{۱}{\frac{۱ - x + x}{x}} = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{۱}{x + ۱}\right) = \frac{۱ - \frac{۱}{x + ۱}}{\frac{۱}{x + ۱}} = \frac{\frac{x + ۱ - ۱}{x + ۱}}{\frac{۱}{x + ۱}} = \frac{\frac{x}{x + ۱}}{\frac{۱}{x + ۱}} = \frac{x(x + ۱)}{x + ۱} = x$$

مثال: برای هر عدد مثبت a که $a \neq ۱$ تابع $f(x) = a^x$ با دامنه ی R وارون تابع $g(x) = \log_a x$ با دامنه ی $(۰, +\infty)$ است. زیرا:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x \ ; x \in (۰, +\infty)$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(a^x) = \log_a^{a^x} = x \log_a^{a} = x \times ۱ = x \ ; x \in R$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱/ پیش دانشگاهی تجربی /فصل دوم (بخش دوم):

توابع و معادلات

F*unctions* **A***nd* **E***quations*

دنباله ها:

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله های عددی و به طور خاص با دنباله های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد را تشکیل می دهند.»

در واقع هر موقع مجموعه ای از اعداد را شماره گذاری می کنیم دنباله ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جمله ی دنباله می نامیم. دنباله ها خود نیز به دو دسته ی متناهی(باپایان) و نامتناهی(بی پایان) تقسیم می شوند.

در دنباله ای با نام u ،جمله ی اول را با $u_۱$ ، جمله ی دوم را با $u_۲$ ، جمله ی سوم را با $u_۳$ ،... ، جمله ی n ام را با u_n و... نمایش می دهیم.

u_n را جمله ی عمومی دنباله می گوییم که با توجه به آن می توانیم سایر جملات دنباله را به دست آوریم.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای $u_n = n^۲ + ۴n$ می باشد. چهار جمله ی اول دنباله را به دست آورید.

حل:

$$u_n = n^۲ + ۴n \quad \Rightarrow \begin{cases} n = ۱ \Rightarrow u_۱ = ۱^۲ + ۴(۱) \Rightarrow u_۱ = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow u_۱ = ۵ \\ n = ۲ \Rightarrow u_۲ = ۲^۲ + ۴(۲) \Rightarrow u_۲ = ۴ + ۸ = ۱۲ \Rightarrow u_۲ = ۱۲ \\ n = ۳ \Rightarrow u_۳ = ۳^۲ + ۴(۳) \Rightarrow u_۳ = ۹ + ۱۲ = ۲۱ \Rightarrow u_۳ = ۲۱ \\ n = ۴ \Rightarrow u_۴ = ۴^۲ + ۴(۴) \Rightarrow u_۴ = ۱۶ + ۱۶ = ۳۲ \Rightarrow u_۴ = ۳۲ \end{cases}$$

تعریف دیگری از دنباله:

دنباله، تابعی است که دامنه ی آن مجموعه ی اعداد طبیعی$(\mathbf{N})$ و برد آن(که همان جملات دنباله می باشد) مجموعه ی اعداد حقیقی$(\mathbf{R})$ و ضابطه ی آن جمله ی عمومی دنباله(u_n) است. به بیان دیگر:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f(n) = u_n$$

به عنوان مثال، دنباله ی ... ,۵,۱۲,۲۱,۳۲ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

n	۱	۲	۳	۴	$\cdots$	n
$f(n)=u_n$	۵	۱۲	۲۱	۳۲	$\cdots$	$n^{۲}+۴n$

در نمایش بالا، سطر اول دامنه ی تابع(مجموعه ی اعداد طبیعی (N)) و سطر دوم برد تابع(مجموعه ی اعداد حقیقی (R))می باشد.

تذکر: در دنباله های متناهی، دامنه ی تابع زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی می باشد. به عنوان مثال در دنباله ی $u_n=$ ۱,۴,۹,۱۶ دامنه مجموعه ی $\{۱,۲,۳,۴\}\subset \mathbf{N}$ و برد آن مجموعه ی $\{۱,۴,۹,۱۶\}$ می باشد.

مثال: سه جمله ی ابتدایی هر یک از دنباله های زیر را بنویسید.

الف) $a_n=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{n-۱}$　　ب) $b_n=\frac{n(n+۲)}{۲}$　　ج) $c_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$

$$a_n=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{n-۱}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\Rightarrow a_۱=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۱-۱}\Rightarrow a_۱=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۰}\Rightarrow a_۱=۵\times ۱\Rightarrow a_۱=۵\\ n=۲\Rightarrow a_۲=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲-۱}\Rightarrow a_۲=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۱}\Rightarrow a_۲=۵\times\frac{۳}{۵}\Rightarrow a_۲=۳\\ n=۳\Rightarrow a_۳=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳-۱}\Rightarrow a_۳=۵\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}\Rightarrow a_۳=۵\times\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow a_۳=\frac{۹}{۵}\end{cases}$$

ب) $$b_n=\frac{n(n+۲)}{۲}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\Rightarrow a_۱=\frac{۱(۱+۲)}{۲}\Rightarrow a_۱=\frac{۳}{۲}\\ n=۲\Rightarrow a_۲=\frac{۲(۲+۲)}{۲}\Rightarrow a_۲=۴\\ n=۳\Rightarrow a_۳=\frac{۳(۳+۲)}{۲}\Rightarrow a_۳=\frac{۱۵}{۲}\end{cases}$$

ج) $c_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} n = ۱ \Rightarrow a_۱ = \left(۱ + \frac{۱}{۱}\right)^۱ \Rightarrow a_۱ = (۲)^۱ \Rightarrow a_۱ = ۲ \\ n = ۲ \Rightarrow a_۲ = \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)^۲ \Rightarrow a_۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ \Rightarrow a_۲ = \frac{۹}{۴} \\ n = ۳ \Rightarrow a_۳ = \left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)^۳ \Rightarrow a_۳ = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۳ \Rightarrow a_۳ = \frac{۶۴}{۲۷} \end{cases}$

مثال: دنباله ی $a_n = \frac{۳n + ۱}{۲n - ۱}$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر دامنه ی آن مجموعه ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد، برد(جمله های دنباله) آن را به دست آورید.

ب) با فرض نامتناهی بودن a_n ، جمله ی چندم این دنباله برابر $\frac{۵}{۳}$ است؟

حل: الف) چون دامنه مجموعه ای متناهی است پس دنباله نیز متناهی است و داریم:

$$a_۱ = \frac{۳(۱) + ۱}{۲(۱) - ۱} = \frac{۴}{۱} = ۴ \qquad a_۲ = \frac{۳(۲) + ۱}{۲(۲) - ۱} = \frac{۷}{۳} \qquad a_۳ = \frac{۳(۳) + ۱}{۲(۳) - ۱} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

ب) برای یافتن شماره ی جمله ی $\frac{۵}{۳}$ ، کافی است در جمله ی عمومی داده شده، عدد $\frac{۵}{۳}$ را به جای a_n قرار دهیم:

$$\frac{۵}{۳} = \frac{۳n + ۱}{۲n - ۱} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۵(۲n - ۱) = ۳(۳n + ۱) \Rightarrow ۱۰n - ۵ = ۹n + ۳ \Rightarrow ۱۰n - ۹n = ۳ + ۵ \Rightarrow n = ۸$$

تمرین: در دنباله ی $a_n = ۲n^۲ - ۵n$ چندمین جمله ی دنباله برابر ۸۸ است؟

دنباله ی حسابی:

دنباله ای است که برای به دست آوردن هر جمله ی آن (به جز جمله ی اول) کافی است مقدار ثابتی به نام قدر نسبت را به جمله ی قبلی اضافه کنیم. در دنباله ی حسابی قدرنسبت را با حرف d نشان می دهیم.

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی:

اگر $a_۱$جمله ی اول و d قدر نسبت یک دنباله ی حسابی باشد، آن گاه جمله ی عمومی دنباله که همان جمله ی n ام می باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$a_n = a_۱ + [(n - ۱) \times d\ ]$$

مثال: در تصاعد حسابی ... ,۲,۷,۱۲,۱۷ جمله ی بیستم را به دست آورید.

حل:

$$a_۱ = ۲\ \ , d = ۷ - ۲ = ۵ \Rightarrow a_{۲۰} = ?$$

$$a_n = a_۱ + [(n - ۱) \times d\ ] \xrightarrow{n=۲۰} a_{۲۰} = a_۱ + [(۲۰ - ۱) \times d] \Rightarrow a_{۲۰} = a_۱ + ۱۹d = ۲ + ۱۹ \times ۵ = ۹۷$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی $(\mathbf{S}_n)$:

روش اول: اگر جمله ی اول، جمله ی آخر دنباله و تعداد جملات دنباله ای حسابی را داشته باشیم، مجموع $\boldsymbol{n}$ جمله ی اول یک دنباله ی حسابی $(\mathbf{S}_n)$ از رابطه ی زیر به دست می آید:

جمله ی آخر

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (a_۱ + a_n)$$

تعداد جملات　　جمله ی اول

مثال: در یک دنباله ی حسابی که ۱۰ جمله دارد، جمله ی اول ۲ و جمله ی آخر ۲۰ است. مجموع این جملات را بیابید.

حل:

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (a_۱ + a_n) \quad \Rightarrow \mathrm{S}_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲} \times (۲ + ۲۰) \ \ = ۵ \times (۲۲) \quad = ۱۱۰$$

مثال: نشان دهید: $۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱=n^۲$

حل: اگر فرض کنیم دنباله ای حسابی داریم که جملات آن به صورت $۱,۳,۵,\ldots,۲n-۱$ است آن گاه منظور از سمت چپ تساوی بالا، حاصل جمع جملات این دنباله ی حسابی است. تعداد این جملات n تاست. حال با استفاده از فرمول $\mathbf{S}_n$ مجموع این جملات را حساب می کنیم.

$$\begin{cases} a_۱=۱ \\ a_n=۲n-۱ \\ \text{تعداد جملات}=n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_n=\frac{n}{۲}\times(a_۱+a_n)\Rightarrow \mathbf{S}_n=\frac{n}{۲}(۱+۲n-۱)=\frac{n}{۲}(۲n)=n\times n\Rightarrow \mathbf{S}_n=n^۲$$

تمرین: نشان دهید: ب) $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ الف) $۲+۴+۶+\cdots+۲n=n^۲+n$

روش دوم: اگر **جمله ی اول** و **قدر نسبت** دنباله معلوم باشد، آن گاه مجموع $\boldsymbol{n}$ جمله ی اول یک دنباله ی حسابی $(\mathbf{S}_n)$ از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\mathbf{S}_n=\frac{n}{۲}\times(۲a_۱+[(n-۱)\times d])$$

مثال: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی اول ۵ و قدر نسبت دنباله ۳ می باشد. مجموع ۱۰ جمله ی اول این دنباله را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a_۱=۵ \\ d=۳ \\ n=۱۰ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_n=\frac{n}{۲}\times(۲a_۱+[(n-۱)\times d]) \quad \Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}\times(۲\times۵+[(۱۰-۱)\times۳])$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰}=۵\times(۱۰+۹\times۳) \quad \Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰}=۵\times(۳۷)=۱۸۵$$

مثال: محصول تولید لوله های فولادی کارخانه ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می باشد. قرار است تولید این لوله ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله ها در دهه ی ۹۰ را پیش بینی کنید.

حل:

$$\begin{cases} a_۱ = ۱۹ \\ d = ۴ \\ n = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (۲a_۱ + [(n-۱) \times d]) \quad \Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲} \times (۲ \times ۱۹ + [(۱۰ - ۱) \times ۴])$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰} = ۵ \times (۳۸ + ۹ \times ۴) \quad \Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰} = ۵ \times (۷۴) = ۳۷۰$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که مضرب ۳ هستند را به دست آورید.

حل: اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که بر ۳ بخش پذیر هستند، به صورت روبرو می باشند: ... ,۳,۶,۹

دنباله ی بالا، دنباله ای حسابی با جمله ی اول ۳ و قدر نسبت ۳ می باشد. حال باید تعداد جملات این دنباله را به دست آوریم.

تعداد مضارب طبیعی ۳ که از ۱۰۰ کوچک تر هستند از رابطه ی $۳۳ = \left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]$ به دست می آید.

حال از فرمول $\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (۲a_۱ + [(n-۱) \times d])$ استفاده می کنیم تا مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که مضرب ۳ هستند به دست آید.

$$n = ۳۳ \Rightarrow \mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (۲a_۱ + [(n-۱) \times d]) \quad \Rightarrow \mathbf{S}_{۳۳} = \frac{۳۳}{۲} \times (۲ \times ۳ + [(۳۳ - ۱) \times ۳])$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_{۳۳} = \frac{۳۳}{۲} \times (۶ + ۳۲ \times ۳) = \frac{۳۳}{۲} \times (۶ + ۹۶) = \frac{۳۳}{۲} \times ۱۰۲ = ۳۳ \times ۵۱ = ۱۶۸۳$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۷ هستند را به دست آورید.

حل: اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که بر ۳ بخش پذیر هستند، به صورت روبرو می باشند: ... ,۷,۱۴,۲۱

دنباله ی بالا، دنباله ای حسابی با جمله ی اول ۷ و قدر نسبت ۷ می باشد. حال باید تعداد جملات این دنباله را به دست آوریم.

تعداد مضارب طبیعی ۷ که از ۱۰۰۰ کوچک تر هستند از رابطه ی $۱۴۲ = \left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right]$ به دست می آید.

حال از فرمول $\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (a_۱ + a_n)$ استفاده می کنیم تا مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۷ هستند به دست آید.

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (۲a_۱ + [(n-۱) \times d]) \xRightarrow{n=۱۴۲} \mathbf{S}_{۱۴۲} = \frac{۱۴۲}{۲} \times (۲ \times ۷ + [(۱۴۲ - ۱) \times ۷])$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_{۱۴۲} = \frac{۱۴۲}{۲} \times (۱۴ + [(۱۴۱) \times ۷]) = \frac{۱۴۲}{۲} \times (۱۴ + ۹۸۷) = \frac{۱۴۲}{۲} \times ۱۰۰۱ = ۷۱ \times ۱۰۰۱ = ۷۱۰۷۱$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۶ هستند را به دست آورید.

مثال: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی دهم ۱۸- و جمله ی بیستم ۴۲ می باشد. در این صورت:

الف) جمله ی اول و قدر نسبت این دنباله را به دست آورید. **ب)** مجموع سی جمله ی ابتدای این دنباله را حساب کنید.

ج) مجموع ده جمله ی دوم این دنباله را حساب کنید.

حل: الف) با توجه به فرض سوال داریم:

$$\begin{cases} a_{۱۰} = -۱۸ \\ a_{۲۰} = ۴۲ \end{cases} \xRightarrow[a_{۲۰} = a_۱ + ۱۹d]{a_{۱۰} = a_۱ + ۹d} \begin{cases} a_۱ + ۹d = -۱۸ \\ a_۱ + ۱۹d = ۴۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_۱ - ۹d = +۱۸ \\ a_۱ + ۱۹d = ۴۲ \end{cases} \xRightarrow{\text{حل دستگاه}} d = ۶, a_۱ = -۷۲$$

ب) با توجه به قسمت الف داریم:

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{۲} \times (۲a_۱ + [(n-۱) \times d]) \xRightarrow{n=۳۰} \mathbf{S}_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲} \times (۲ \times (-۷۲) + [(۳۰ - ۱) \times ۶])$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲} \times (-۱۴۴ + [(۲۹) \times ۶]) = \frac{۳۰}{۲} \times (-۱۴۴ + ۱۷۴) = \frac{۳۰}{۲} \times ۳۰ = ۱۵ \times ۳۰ = ۴۵۰$$

ج) با توجه به عبارت زیر، مجموع ده جمله ی دوم را محاسبه می کنیم:

$$\underbrace{\underbrace{a_{۱}+a_{۲}+\cdots+a_{۱۰}}_{\text{مجموع ۱۰ جمله ی اول}}+\underbrace{a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots a_{۲۰}}_{\text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم}}}_{\text{مجموع ۲۰ جمله ی اول}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۲۰ جمله ی اول} = \text{مجموع ۱۰ جمله ی اول} + \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} \Rightarrow S_{۲۰} = S_{۱۰} + \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = S_{۲۰} - S_{۱۰}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{۲۰}{۲}\times(۲\times -۷۲+[(۲۰-۱)\times ۶]) - \frac{۱۰}{۲}\times(۲\times -۷۲+[(۱۰-۱)\times ۶])$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{۲۰}{۲}\times(-۱۴۴+[۱۹\times ۶]) - \frac{۱۰}{۲}\times(-۱۴۴+[۹\times ۶]) +$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{۲۰}{۲}\times(-۱۴۴+۱۱۴) - \frac{۱۰}{۲}\times(-۱۴۴+۵۴) +$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{۲۰}{۲}\times(-۳۰) - \frac{۱۰}{۲}\times(-۹۰) \Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = -۳۰۰-(-۴۵۰)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = -۳۰۰+۴۵۰ = ۱۵۰$$

تمرین: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی پنجم ۱۹- و جمله ی دهم ۳۱ می باشد. در این صورت:

الف) مجموع بیست جمله ی ابتدای این دنباله را حساب کنید. **ب)**مجموع ده جمله ی دوم این دنباله را حساب کنید.

مثال: اگر در یک دنباله ی حسابی جمله ی اول ۷- بوده و مجموع ۹ جمله ی اول آن نصف مجموع شش جمله ی دوم آن باشد، قدر نسبت را به دست آورید.

حل:

$$\mathbf{S}_{۹}=\frac{۹}{۲}\times(۲\times(-۷)+[(۹-۱)\times d])\Rightarrow \mathbf{S}_{۹}=\frac{۹}{۲}\times(-۱۴+۸d)$$

$$\text{مجموع ۶ جمله ی دوم}=\mathrm{S}_{۱۲}-\mathrm{S}_{۶}=\frac{۱۲}{۲}\times(۲\times(-۷)+[(۱۲-۱)\times d])-\frac{۶}{۲}\times(۲\times(-۷)+[(۶-۱)\times d])$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۶ جمله ی دوم}=\frac{۱۲}{۲}\times(-۱۴+۱۱d)-\frac{۶}{۲}\times(-۱۴+۵d)=۶\times(-۱۴+۱۱d)-۳(-۱۴+۵d)$$

$$=-۸۴+۶۶d+۴۲-۱۵d=-۴۲+۵۱d$$

اما طبق صورت سوال داریم:

$$\mathbf{S}_{۹}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{S}_{۱۲}-\mathbf{S}_{۶})\Rightarrow ۲\mathrm{S}_{۹}=\mathrm{S}_{۱۲}-\mathrm{S}_{۶}\Rightarrow ۲\left(\frac{۹}{۲}\times(-۱۴+۸d)\right)=-۴۲+۵۱d$$

$$\Rightarrow ۹(-۱۴+۸d)=-۴۲+۵۱d \quad \Rightarrow -۱۲۶+۷۲d=-۴۲+۵۱d$$

$$\Rightarrow ۷۲d-۵۱d=-۴۲+۱۲۶\Rightarrow ۲۱d=۸۴\Rightarrow d=۴$$

تمرین: دنباله ای حسابی را مشخص کنید که جمله ی اول ۲- بوده و مجموع پنج جمله ی اول آن یک سوم مجموع پنج جمله ی بعدی آن باشد.

دنباله ی هندسی:

تعریف **دنباله ی هندسی**: اگر در دنباله ای برای پیدا کردن هر جمله (به جز جمله ی اول) جمله ی قبل را در یک مقدار ثابت ضرب کنیم، آن دنباله را دنباله ی هندسی می گوییم. به این مقدار ثابت، قدر نسبت دنباله می گوییم و آن را با حرف q یا r نمایش می دهیم.

جمله ی عمومی دنباله ی (تصاعد) هندسی:

اگر جمله اول دنباله را با $a_۱$ و قدر نسبت آن را با q نمایش دهیم، **جمله ی عمومی دنباله** که همان جمله ی n ام می باشد برابر است با:

$$a_n = a_۱ q^{n-۱}$$

مثال: در دنباله ی هندسی مقابل جمله ی دوازدهم را به دست آورید. $۳,۹,۲۷, \ldots$

حل:

$$a_۱ = ۳, q = \frac{۹}{۳} = ۳ \Rightarrow a_{۱۲} = a_۱ q^{۱۲-۱} \Rightarrow a_{۱۲} = ۳ \times ۳^{۱۱} \Rightarrow a_{۱۲} = ۳^{۱۲}$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی هندسی:

اگر $a_۱$جمله ی اول و q قدر نسبت یک دنباله ی هندسی باشد، آن گاه مجموع n جمله ی اول این دنباله را که با $\mathbf{S}_n$ نمایش می دهیم، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\mathbf{S}_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \quad ; q \neq ۱$$

مثال: مجموع ۵۰ جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با جمله ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a = ۴ \\ q = ۳ \\ n = ۵۰ \end{cases} \quad \mathbf{S}_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \Rightarrow \mathbf{S}_{۵۰} = \frac{۴\left(۱-۳^{۵۰}\right)}{۱-۳} = \frac{۴\left(۱-۳^{۵۰}\right)}{-۲} = -۲\left(۱-۳^{۵۰}\right)$$

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای هندسی به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}(-۲)^n$ می باشد. مجموع ده جمله ی اول آن را حساب کنید.

حل: با توجه به جمله ی عمومی، جمله ی اول و قدر نسبت دنباله را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} a_۱ = \frac{۳}{۲}(-۲)^۱ = \frac{۳}{۲} \times (-۲) = -۳ \\ \\ a_۲ = \frac{۳}{۲}(-۲)^۲ = \frac{۳}{۲} \times (۴) = +۶ \end{cases} \Rightarrow q = \frac{+۶}{-۳} = -۲$$

$$\begin{cases} a = -۳ \\ q = -۲ \\ n = ۱۰ \end{cases} \quad \mathbf{S}_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow \mathbf{S}_{۱۰} = \frac{-۳\left(۱ - (-۲)^{۱۰}\right)}{۱ - (-۲)} = \frac{-۳(۱ - ۱۰۲۴)}{۱ + ۲} = \frac{-۳(-۱۰۲۳)}{۳} = ۱۰۲۳$$

تمرین: جمله ی عمومی دنباله ای هندسی به صورت $a_n = ۵(-۲)^{n-۱}$ می باشد. مجموع ده جمله ی اول آن را حساب کنید.

مثال: مجموع هشت جمله ی اول یک دنباله ی هندسی ۱۷ برابر مجموع چهار جمله ی اول آن است.

الف) قدرنسبت این دنباله را به دست آورید. **ب)** جمله ی دوازدهم این دنباله چند برابر جمله ی هشتم آن می باشد.

حل: الف) با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$\mathrm{S}_۸ = ۱۷\mathrm{S}_۴ \Rightarrow \frac{a_۱\left(۱ - q^۸\right)}{۱ - q} = ۱۷ \times \frac{a_۱\left(۱ - q^۴\right)}{۱ - q} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} a_۱\left(۱ - q^۸\right)(۱ - q) = ۱۷a_۱\left(۱ - q^۴\right)(۱ - q)$$

$$\Rightarrow ۱ - q^۸ = ۱۷\left(۱ - q^۴\right) \Rightarrow ۱^۲ - \left(q^۴\right)^۲ = ۱۷\left(۱ - q^۴\right) \xRightarrow{\text{تجزیه}} \left(۱ + q^۴\right)\left(۱ - q^۴\right) = ۱۷\left(۱ - q^۴\right)$$

$$\Rightarrow ۱ + q^۴ = ۱۷ \Rightarrow q^۴ = ۱۶ \Rightarrow \sqrt[۴]{q^۴} = \sqrt[۴]{۱۶} \Rightarrow |q| = ۲ \Rightarrow q = \pm ۲$$

ب)
$$\begin{cases} a_{۱۲} = a_۱ q^{۱۱} \\ a_۸ = a_۱ q^۷ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{۱۲}}{a_۸} = \frac{a_۱ q^{۱۱}}{a_۱ q^۷} \Rightarrow \frac{a_{۱۲}}{a_۸} = q^۴ \xrightarrow{q^۴ = ۱۶} \frac{a_{۱۲}}{a_۸} = ۱۶ \Rightarrow a_{۱۲} = ۱۶ a_۸$$

تمرین: مجموع شش جمله ی اول یک دنباله ی هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ی اول آن است.

الف) قدرنسبت این دنباله را به دست آورید. **ب)** جمله ی هفتم این دنباله چند برابر جمله ی چهارم آن می باشد.

مثال: با استفاده از دستور محاسبه ی مجموع جملات دنباله ی هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n - ۱ = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱)$

ب) $x^n + ۱ = (x + ۱)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱)$

ج) به کمک قسمت الف، درستی اتحاد زیر را نشان دهید:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}.b + \cdots + a.b^{n-۲} + b^{n-۱})$$

حل: الف) دنباله ای هندسی با جمله ی اول ۱ و قدر نسبت x را در نظر بگیرید. جمله ی عمومی این دنباله $a_n = ۱ \times x^{n-۱}$ و جملات اول، دوم،... و جمله ی n ام به صورت روبرو می باشد: $۱, x, \ldots, x^{n-۲}, x^{n-۱}$

مجموع n جمله ی اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ q = x \\ n = n \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_n = \dfrac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} = \dfrac{۱ \times (۱ - x^n)}{۱ - x} = \dfrac{۱ - x^n}{۱ - x} = \dfrac{-(۱ - x^n)}{-(۱ - x)} = \dfrac{x^n - ۱}{x - ۱} \ (\mathrm{I}) \\ \mathbf{S}_n = ۱ + x + \cdots + x^{n-۲} + x^{n-۱} = x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱ \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

سمت چپ تساوی های (I) و (II) با هم برابر است. بنابراین سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$\frac{x^n - ۱}{x - ۱} = (x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱) \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n - ۱ = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱)$$

ب) دنباله ای هندسی با جمله ی اول ۱ و قدر نسبت $-x$ را در نظر بگیرید. جمله ی عمومی این دنباله $a_n = ۱ \times (-x)^{n-۱}$ و جملات اول، دوم،... و جمله ی n ام به صورت روبرو می باشد: $۱, -x, \dots, -x^{n-۲}, x^{n-۱}$

مجموع n جمله ی اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ q = -x \\ n = n \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{S}_n = \dfrac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = \dfrac{۱\times(۱-(-x)^n)}{۱-(-x)} = \dfrac{۱+x^n}{۱+x} = \dfrac{x^n+۱}{x+۱}\ (\mathrm{I}) \\ \\ \mathbf{S}_n = ۱ - x + \cdots - x^{n-۲} + x^{n-۱} = x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱\ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

سمت چپ تساوی های (I) و (II) با هم برابر است. بنابراین سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$\frac{x^n+۱}{x+۱} = \left(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱\right) \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n + ۱ = (x+۱)\left(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱\right)$$

ج) در اتحادی که در قسمت الف ثابت کردیم به جای x قرار می دهیم $\dfrac{a}{b}$. در نتیجه داریم:

$$x^n - ۱ = (x-۱)\left(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱\right) \xRightarrow{x=\frac{a}{b}} \left(\frac{a}{b}\right)^n - ۱ = \left(\frac{a}{b} - ۱\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-۱} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-۲} + \cdots + \frac{a}{b} + ۱\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{a^n}}{\boldsymbol{b^n}} - ۱ = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} - ۱\right)\left(\frac{\boldsymbol{a^{n-۱}}}{\boldsymbol{b^{n-۱}}} + \frac{\boldsymbol{a^{n-۲}}}{\boldsymbol{b^{n-۲}}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + ۱\right) \quad \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a^n - b^n}}{\boldsymbol{b^n}} = \left(\frac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{b}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{a^{n-۱} + a^{n-۲}.b + \cdots + a.b^{n-۲} + b^{n-۱}}}{\boldsymbol{b^{n-۱}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{a^n - b^n}}{\boldsymbol{b^n}} = \frac{\boldsymbol{(a-b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}.b + \cdots + a.b^{n-۲} + b^{n-۱}\right)}}{\boldsymbol{b.b^{n-۱}}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a^n - b^n}}{\boldsymbol{b^n}} = \frac{\boldsymbol{(a-b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}.b + \cdots + a.b^{n-۲} + b^{n-۱}\right)}}{\boldsymbol{b^n}}$$

با ساده کردن b^n از طرفین تساوی، به اتحاد مورد نظر می رسیم.

$$\Rightarrow a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}.b + \cdots + a.b^{n-۲} + b^{n-۱}\right)$$

حد مجموع جملات دنباله ی هندسی

گفتیم برای محاسبه ی مجموع n جمله ی ابتدای دنباله ی هندسی از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

حال اگر در دنباله ای هندسی داشته باشیم: $|q| < ۱ \Rightarrow -۱ < q < ۱$ در این صورت با افزایش n ، مقدار $|q|^n$ کوچکتر می شود.

به عبارت دیگر وقتی n بی نهایت بزرگ می شود، مقدار $|q|^n$ بی نهایت کوچک شده و به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود.

در نتیجه مجموع تمام جملات دنباله یا حد مجموع جملات دنباله برابر می شود با:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \xRightarrow{|q|<۱, n\to\infty} S_n = \frac{a_۱}{۱-q}$$

مثال: مجموع تمام جملاتِ دنباله ی زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب کنید.

$$۳, -۱, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \ldots$$

حل:

$$\begin{cases} a_۱ = ۳ \\ q = \frac{-۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{a_۱}{۱-q} \Rightarrow S_n = \frac{۳}{۱-\left(-\frac{۱}{۳}\right)} = \frac{۳}{۱+\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۹}{۴}$$

دنباله های صعودی و نزولی - کران داری دنباله ها

یادآوری حد چند جمله ای ها وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$:

اگر $f(x)$ تابعی چند جمله ای به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + l$ باشد، آن گاه حد $f(x)$ هنگامی که $x \longrightarrow \pm\infty$ ، برابر حد جمله ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + l\right) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

به عنوان مثال حد تابع $f(x) = ۴x^۲ - ۵x + ۱$ هنگامی که $x \longrightarrow \pm\infty$ برابر است با حد $۴x^۲$. یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(۴x^۲ - ۵x + ۱\right) = \lim_{x\to\pm\infty} ۴x^۲ = +\infty$$

نکته: حد تابع گویای $f(x) = \dfrac{ax^m + bx^{m-۱} + \cdots + l}{a'x^n + b'x^{n-۱} + \cdots + l'}$ وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$ ، با توجه به مقادیر اعداد صحیح و مثبت m و n برابر خواهد بود با:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m + bx^{m-۱} + \cdots + l}{a'x^n + b'x^{n-۱} + \cdots + l'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m}{a'x^n} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{a'}x^{m-n} = \begin{cases} \pm\infty & ;if\ m > n \\ \dfrac{a}{a'} & ;if\ m = n \\ ۰ & ;if\ m < n \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴}{۲x} = ۰$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲ + ۴}{۲x^۲} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲ + ۴}{۲x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{۲}x = \pm\infty$$

حد دنباله ها:

حد دنباله ها و حد تابع در $+\infty$ مفهومی مشابه دارند. یعنی برای محاسبه ی حد هر دنباله، باید حد جمله ی عمومی آن را وقتی $n \longrightarrow +\infty$ به دست آوریم.

به عنوان مثال برای محاسبه ی حد دنباله ی $u_n = \frac{۱}{۲n+۶}$ داریم: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{۲n+۶} = ۰$

پس حد دنباله ی u_n وقتی $n \to +\infty$ برابر صفر است. زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n، $۲n+۶$ بزرگ و بزرگ تر شده و در نتیجه کسر $\frac{۱}{۲n+۶}$ کوچک و کوچک تر شده و به صفر نزدیک می شود. به عبارت دیگر اگر n را به اندازه ی کافی بزرگ کنیم، می توانیم کسر $\frac{۱}{۲n+۶}$ را به هر اندازه که بخواهیم به صفر نزدیک کنیم.

تعریف: اگر دنباله ی u_n دارای حد بوده و مقدار حد آن عدد حقیقی L باشد، در این صورت دنباله را **همگرا** گوییم.

در این صورت گوییم دنباله ی u_n به عدد حقیقی L همگرا می باشد.

به عنوان مثال، حد دنباله ی $\frac{۱}{۲n+۶}$ صفر است. پس این دنباله همگرا به صفر است.

تذکر: دنباله ای که همگرا نباشد را واگرا می گوییم.

تذکر: در حالت های زیر دنباله همگرا نمی باشد:

الف) اگر حد دنباله $+\infty$ یا $-\infty$ شود. به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{n^۲(n+۲)}{۴}$ دنباله ای همگرا نمی باشد. زیرا حد آن $+\infty$ است:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲(n+۲)}{۴} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۳+۲n^۲}{۴} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۳}{۴} = +\infty$$

ب) اگر دنباله به عددی یکتا میل نکند، می گوییم دنباله همگرا نیست. به عنوان مثال دنباله ی $u_n = (-۱)^n$ دنباله ای همگرا نیست. زیرا:

زیرا این دنباله به ازای n های زوج برابر یک و به ازای n های فرد برابر منفی یک است و با بزرگ شدن n، جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

$$u_n = (-۱)^n = \begin{cases} ۱ & ;\ n\ \text{زوج} \\ -۱ & ;\ n\ \text{فرد} \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \text{وجود ندارد}$$

مثال: همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = ۱ \Rightarrow$ دنباله همگرا به ۱ است

ب) $u_n = (-۱)^{n+۱} = \begin{cases} -۱ & ; n \text{ زوج} \\ ۱ & ; n \text{ فرد} \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n =$ وجود ندارد $\Rightarrow$ دنباله واگرا است.

ج) $u_n = ۲ + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲+۳} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(۲ + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲+۳} \right) \xRightarrow{(-۱)^{n+۱} = ۱ \text{ یا } -۱} \lim_{n \to +\infty} \left(۲ + \frac{\text{عدد}}{+\infty} \right) = ۲ + ۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = ۲ \Rightarrow$ دنباله همگرا به ۲ است

د) $u_n = cos(n\pi) = \begin{cases} ۱ & ; n \text{ زوج} \\ -۱ & ; n \text{ فرد} \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n =$ وجود ندارد $\Rightarrow$ دنباله واگرا است.

تمرین: همگرایی یا واگرایی دنباله ی $u_n = \frac{n^۲-۱}{n-۳} - \frac{n^۲+۱}{n+۷}$ را بررسی کنید.

دنباله های صعودی و نزولی:

دنباله های زیر را در نظر بگیرید:

$a_n = \frac{۱}{n} \quad : ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots \qquad b_n = n : ۱,۲,۳, \ldots \qquad c_n = (-۱)^n : -۱,۱,-۱,۱, \ldots$

می بینیم که در دنباله ی a_n هر چه شماره ی جمله افزایش یابد، مقدار جمله کاهش پیدا می کند. به عبارت دیگر در این دنباله هر جمله از جمله ی قبلی اش کوچک تر است. دنباله ی a_n نمونه ای از یک **دنباله ی نزولی** است.

اما در دنباله ی b_n رفتار جمله ها برعکس است. در این جا هر چه شماره ی جمله افزایش یابد، مقدار جمله نیز افزایش پیدا می کند. به عبارت دیگر در این دنباله هر جمله از جمله ی قبلی اش بزرگ تر است. دنباله ی b_n نمونه ای از یک **دنباله ی صعودی** است.

اما در دنباله ی c_n با افزایش شماره ی جمله، مقدار جمله ها در حال نوسان بین دو عدد ۱ و ۱- است و یک روند افزایشی و یا کاهشی بین تمامی جمله های دنباله وجود ندارد. چنین دنباله ای نه صعودی است و نه نزولی.

تعریف: اگر u_n دنباله ای باشد که با افزایش n(شماره ی جمله) داشته باشیم: $u_{n+۱} \geq u_n$ یا $u_{n+۱} - u_n \geq ۰$ آن گاه u_n را دنباله ای صعودی می گوییم.

حال اگر رابطه ی بین جملات دنباله به صورت $u_{n+۱} > u_n$ یا $u_{n+۱} - u_n > ۰$ باشد، در این صورت دنباله را اکیدا صعودی گوییم.

تعریف: اگر u_n دنباله ای باشد که با افزایش n(شماره ی جمله) داشته باشیم: $u_{n+۱} \leq u_n$ یا $u_{n+۱} - u_n \leq ۰$ آن گاه u_n را دنباله ای نزولی می گوییم.

نیز اگر رابطه ی بین جملات دنباله به صورت $u_{n+۱} < u_n$ یا $u_{n+۱} - u_n < ۰$ باشد، در این صورت دنباله را اکیدا نزولی گوییم.

تذکر: دنباله ی ثابت، دنباله ای است که تمام جملات آن، برابر مقدار ثابتی است. این دنباله هم صعودی و هم نزولی است.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = ۳$ که جملات آن همگی ۳ می باشند، هم صعودی است و هم نزولی.

تذکر: به دنباله ای که صعودی یا نزولی باشد، دنباله ی یکنوا می گوییم.

بررسی صعودی یا نزولی بودن دنباله:

برای تشخیص آن که دنباله ای صعودی و یا نزولی می باشد، از دو روش زیر می توان استفاده کرد.

۱) به کمک جمله ی عمومی، چند جمله ی ابتدایی دنباله را نوشته، سپس با توجه به آن ها، صعودی یا نزولی بودن دنباله را بررسی می کنیم.

مثال: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_n = \frac{۱}{n^۲} \rightarrow a_۱ = ۱, a_۲ = \frac{۱}{۴}, a_۳ = \frac{۱}{۹}, a_۴ = \frac{۱}{۱۶}, \ldots$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله کاهش می یابد. بنابراین c_n یک دنباله ی نزولی(و اکیدا نزولی) است.

ب) $b_n = n^{۲} \quad \rightarrow b_{۱} = ۱, b_{۲} = ۴, b_{۳} = ۹, b_{۴} = ۱۶, \ldots$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله نیز افزایش می یابد. بنابراین b_n یک دنباله ی صعودی(و اکیدا صعودی) است.

ج) $c_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \quad \rightarrow a_{۱} = ۱, a_{۲} = \frac{-۱}{۲}, a_{۳} = \frac{۱}{۳}, a_{۴} = \frac{-۱}{۴}, \ldots$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله روند خاصی را دنبال نمی کنند. بنابراین c_n نه صعودی و نه نزولی است.

د) $u_n = (-۱)^{n+۱} \quad \rightarrow u_{۱} = ۱, u_{۲} = -۱, u_{۳} = ۱, u_{۴} = ۱, \ldots$

این دنباله نه صعودی است و نه نزولی. به چنین دنباله هایی، دنباله های نوسانی می گوییم.

ه) $u_n = \frac{۳^n}{n^{۳}} \quad \rightarrow u_{۱} = ۳, u_{۲} = \frac{۹}{۸}, u_{۳} = \frac{۲۷}{۲۷} = ۱, u_{۴} = \frac{۸۱}{۶۴}, u_{۴} = \frac{۲۴۳}{۱۲۵}, \ldots$

این دنباله در ۳ جمله ی اول در حال کاهش است. اما از جمله ی چهارم به بعد دنباله در حال افزایش است. بنابراین این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

و) $u_n = \frac{n^{۲}}{۲^n} \quad \rightarrow u_{۱} = \frac{۱}{۲}, u_{۲} = \frac{۴}{۴} = ۱, u_{۳} = \frac{۹}{۸}, u_{۴} = \frac{۱۶}{۱۶} = ۱, u_{۴} = \frac{۲۵}{۳۲}, \ldots$

این دنباله در ۳ جمله ی اول قانون کاهش یا افزایش رعایت نشده است. بنابراین این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲) اگر علامت همه ی جمله های دنباله ی u_n یکسان باشد(یعنی همه ی جمله ها مثبت یا همه منفی باشد) پس از محاسبه ی $u_{n+۱}$ به کمک u_n ، نسبت $\frac{u_{n+۱}}{u_n}$ را تشکیل داده و داریم:

۲) اگر علامت همه ی جمله های دنباله ی u_n یکسان باشد(یعنی همه ی جمله ها مثبت یا همه منفی باشد) پس از محاسبه ی $u_{n+۱}$ به کمک u_n ، نسبت $\frac{u_{n+۱}}{u_n}$ را تشکیل داده و داریم:

حالت اول:

$$u_n > ۰ \text{(همه ی جمله ها مثبت)} \Rightarrow \begin{cases} if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} \geq ۱ \Rightarrow \text{دنباله صعودی است}; \ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} > ۱ \Rightarrow \text{دنباله اکیدا صعودی است} \\ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} \leq ۱ \Rightarrow \text{دنباله نزولی است}; \ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} < ۱ \Rightarrow \text{دنباله اکیدا نزولی است} \end{cases}$$

حالت دوم:

$$u_n < ۰ \text{(همه ی جمله ها منفی)} \Rightarrow \begin{cases} if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} \geq ۱ \Rightarrow \text{دنباله نزولی است}; \ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} > ۱ \Rightarrow \text{دنباله اکیدا نزولی است} \\ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} \leq ۱ \Rightarrow \text{دنباله صعودی است}; \ if: \frac{u_{n+۱}}{u_n} < ۱ \Rightarrow \text{دنباله اکیدا صعودی است} \end{cases}$$

مثال: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = ۳^n \quad \rightarrow u_{n+۱} = ۳^{n+۱}$

$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+۱}}{u_n} = \frac{۳^{n+۱}}{۳^n} = ۳^{n+۱-n} = ۳ > ۱ \Rightarrow \frac{u_{n+۱}}{u_n} > ۱ \Rightarrow$$ است (اکیدا صعودی) دنباله ای صعودی u_n

ب) $u_n = \frac{۱}{n^۲ + ۱} \quad \to u_{n+۱} = \frac{۱}{(n+۱)^۲ + ۱}$

$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+۱}}{u_n} = \frac{\frac{۱}{(n+۱)^۲ + ۱}}{\frac{۱}{n^۲ + ۱}} = \frac{n^۲ + ۱}{(n+۱)^۲ + ۱} = \frac{n^۲ + ۱}{n^۲ + ۲n + ۲}$$

در کسر $\frac{n^۲ + ۱}{n^۲ + ۲n + ۲}$ مخرج بیش تر از صورت است. پس کسر کوچک تر از یک است. در نتیجه:

$\Rightarrow \frac{u_{n+۱}}{u_n} < ۱ \Rightarrow$ u_n دنباله ای نزولی (اکیدا نزولی)است

ج) $u_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \quad \to u_{n+۱} = \frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$

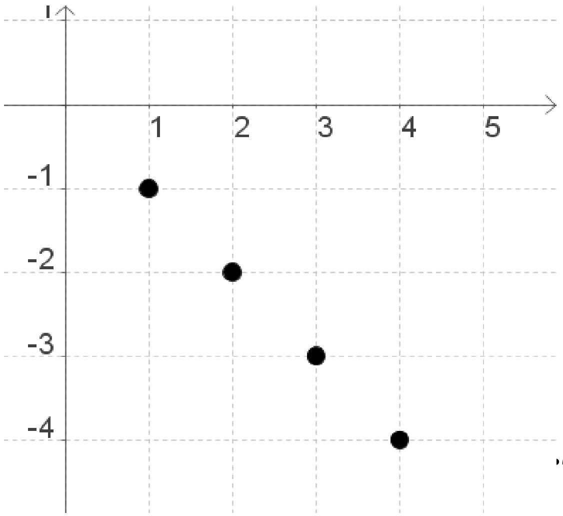
$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+۱}}{u_n} = \frac{\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}}{\frac{n(n+۱)}{۲}} = \frac{(n+۱)(n+۲)}{n(n+۱)} = \frac{n+۲}{n} > ۱ \Rightarrow \frac{u_{n+۱}}{u_n} > ۱$$

$\Rightarrow$ u_n دنباله ای صعودی (اکیدا صعودی)است

دنباله های کراندار:

کران بالای دنباله: اگر تمام جملات دنباله ی u_n از عددی حقیقی و ثابت مانند α کوچک تر یا مساوی باشد (یعنی $u_n \leq \alpha$)، در این حالت α را یک کران بالای دنباله ی u_n گوییم و دنباله ی u_n را از بالا کراندار می نامیم.

توجه کنید که با توجه به تعریف بالا، اگر α کران بالا برای دنباله ی u_n باشد، هر عدد بزرگ تر از α نیز می تواند به عنوان کران بالای دنباله ی u_n محسوب شود، بنابراین این دنباله دارای بی شمار کران بالا است.



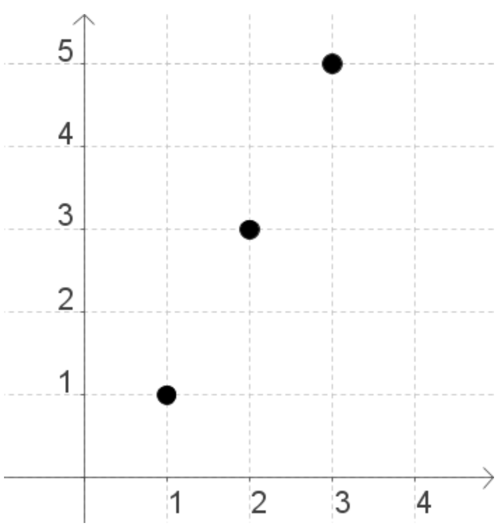
به عنوان مثال دنباله ی $u_n = -n$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت
−۱, −۲, −۳, −۴, ... می باشد.

واضح است که تمام جملات دنباله کوچک تر یا مساوی ۱− است. بنابراین عدد ۱−
یک کران بالا برای این دنباله محسوب می شود.

توجه کنید که تمام اعداد بزرگ تر از ۱− نیز یک کران بالا برای دنباله ی u_n محسوب می شود.

کران پایین دنباله: اگر تمام جملات دنباله ی u_n از عددی حقیقی و ثابت مانند β بزرگ تر یا مساوی باشد (یعنی $u_n \geq \beta$) ، در این حالت β را یک کران پایین دنباله ی u_n گوییم و دنباله ی u_n را از پایین کراندار می نامیم.

نیز توجه کنید که با توجه به تعریف بالا، اگر β کران پایین برای دنباله ی u_n باشد، هر عدد کوچک تر از β نیز می تواند به عنوان کران پایین دنباله ی u_n محسوب شود، بنابراین این دنباله دارای بی شمار کران پایین است.



به عنوان مثال دنباله ی $u_n = ۲n - ۱$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت
۱, ۳, ۵, ۷, ... می باشد.

واضح است که تمام جملات دنباله بزرگ تر یا مساوی ۱ است. بنابراین عدد ۱
یک کران پایین برای این دنباله محسوب می شود.

توجه کنید که تمام اعداد کوچک تر از ۱ نیز یک کران پایین برای دنباله ی u_n
محسوب می شود.

دنباله ای را که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد، **دنباله ی کراندار** می گوییم.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$ می باشد.

یافتن کران بالا و پایین این دنباله

$$n \geq ۱ \xRightarrow{\text{طرفین مثبت}} \frac{۱}{n} \leq ۱ \xRightarrow{\frac{۱}{n} > ۰} ۰ < \frac{۱}{n} \leq ۱ \Rightarrow ۰ < u_n \leq ۱$$

تمام جملات این دنباله در بازه ی $(۰,۱]$ قرار دارند. به عبارت دیگر تمام جملات از یک کوچکتر یا مساوی بوده و از صفر بزرگ تر هستند. پس طبق تعریف کران ها، عدد ۱ کران بالا و عدد ۰ کران پایین دنباله بوده و در نتیجه u_n دنباله ای کران دار است.

تذکر: اگر $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ، آن گاه دنباله ی u_n از پایین کران دار است ولی از بالا کران دار نمی باشد و در نتیجه دنباله ای کران دار نخواهد بود.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{n^۳}{n+۱}$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^۳}{n+۱} = +\infty$$

تذکر: اگر $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ، آن گاه دنباله ی u_n از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نمی باشد و در نتیجه دنباله ای کران دار نخواهد بود.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = -n^۲$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{n\to+\infty} -n^۲ = -\infty$$

چون حد آن $-\infty$ شده است بنابراین از پایین کران دار نبوده و در نتیجه دنباله ی u_n کران دار نیست.

مثال: کراندار بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = ۲n + ۳$

چون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ بنابراین دنباله از بالا کران دار نیست و در نتیجه دنباله کران دار نیست. دقت داشته باشید که کران پایین این دنباله عدد ۵ می باشد.

ب) $u_n = (-۱)^n n$

دنباله به صورت زیر می باشد: $u_n = \begin{cases} n \;;\, if\ \text{زوج}\ n \\ -n \;;\, if\ \text{فرد}\ n \end{cases}$ هم چنین داریم: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \;;\, if\ \text{زوج}\ n \\ -\infty \;;\, if\ \text{فرد}\ n \end{cases}$

بنابراین دنباله، نه از بالا و نه از پایین کراندار نیست. و در نتیجه u_n کراندار نیست.

مثال: کرانداری دنباله ی $u_n = (-۱)^n$ را بررسی کنید.

حل: جملات دنباله به صورت ... ,۱,۱−,۱,۱− می باشند. پس عدد ۱ کران بالا و عدد ۱- کران پایین برای دنباله می باشد. در نتیجه u_n کران دار است.

مثال: کرانداری دنباله ی $u_n = \dfrac{۲}{n^۲ + ۳}$ را بررسی کنید.

حل:

$$n \geq ۱ \Rightarrow n^۲ \geq ۱ \Rightarrow n^۲ + ۳ \geq ۴ \xRightarrow{\text{طرفین مثبت}} \frac{۱}{n^۲+۳} \leq \frac{۱}{۴} \xRightarrow{۰<\frac{۱}{n^۲+۳}} ۰ < \frac{۱}{n^۲+۳} \leq \frac{۱}{۴} \xRightarrow{\times ۲} ۰ < \frac{۲}{n^۲+۳} \leq \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

این دنباله هم از بالا و هم از پایین کراندار و در نتیجه کراندار است. عدد ۰ کران پایین و عدد $\frac{۱}{۲}$ کران بالا برای دنباله می باشد.

نکته: یکی از راه های به دست آوردن کران بالا و کران پایین دنباله، حد دنباله و جمله ی اول آن است.

الف) اگر دنباله ای صعودی باشد در این صورت: کران بالا = حد دنباله و کران پایین = جمله ی اول

ب) اگر دنباله ای نزولی باشد در این صورت: کران پایین = حد دنباله و کران بالا = جمله ی اول

مثال: کرانداری دنباله ی $u_n = \frac{۲n^۲+۳}{n^۲+۱}$ را بررسی کنید.

حل:

$$u_۱ = \frac{۵}{۲}, u_۲ = \frac{۱۱}{۵}, u_۳ = \frac{۲۱}{۱۰}, \dots, \lim_{n\to+\infty} u_n = ۲$$

با توجه به جملات دنباله و حد آن مشخص می شود که دنباله هم از بالا $\left(u_n \le \frac{۵}{۲}\right)$ و هم از پایین $(u_n > ۲)$ کراندار است.

بنابراین دنباله ی بالا کران دار است.

تمرین: کرانداری دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$u_n = \frac{n^۲+۷}{n^۲+۵} \qquad d_n = \frac{۲n+۱}{n+۲} \qquad c_n = (-۱)^{n+۱} \qquad b_n = \frac{۱}{n+۱} \qquad a_n = \frac{۱}{n^۲+۱}$$

مثال: برای هر یک از قسمت های زیر دو دنباله مثال بزنید.

الف) از بالا کران دار بوده ولی از پایین کران دار نباشد.

ب) از پایین کران دار بوده ولی از بالا کران دار نباشد.

ج) هم از پایین و هم از بالا کران دار باشد.

د) نه از پایین کران دار باشد و نه از بالا

حل:

الف) دنباله های $a_n = -n$ و $b_n = -۳^n$ را در نظر بگیرید.

عدد ۱- برای a_n $(a_n \le ۱)$ و عدد ۳- برای b_n $(b_n \le -۳)$ کران بالا می باشند. این دو دنباله دارای کران پایین نمی باشند. زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$$

ب) دنباله های $a_n = n$ و $b_n = ۳^n$ را در نظر بگیرید.

عدد برای a_n $(a_n \ge ۱)$ و عدد ۳ برای b_n $(b_n \ge ۳)$ کران پایین می باشند. این دو دنباله دارای کران بالا نیستند. زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

ج) دنباله های $a_n = sinn$ و $b_n = cosn$ را در نظر بگیرید.

$$-۱ \leq \sin n \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq a_n \leq ۱ \qquad -۱ \leq \cos n \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq b_n \leq ۱$$

برای هر دو دنباله ی بالا اعداد ۱ و ۱- به ترتیب کران بالا و کران پایین می باشند. بنابراین این دنباله ها کران دارند.

د) دنباله های $a_n = (-۱)^n n$ و $b_n = (-۳)^n$را در نظر بگیرید.

$$a_n = (-۱)^n n \quad = \begin{cases} n \ ; if \text{ زوج } n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty \\ \\ -n \ ; if \text{ فرد } n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty \end{cases}$$

اگر n زوج باشد، حد دنباله $+\infty$ شده و در نتیجه این دنباله از پایین کران دار بوده(۱) ولی از بالا کران دار نمی باشد و اگر n فرد باشد ، حد دنباله شده و این دنباله از بالا کران دار بوده (۱-) اما از پایین کران دار نمی باشد. در نتیجه کل دنباله نه از بالا و نه از پایین کران دار است.

$$b_n = (-۳)^n \quad = \begin{cases} ۳^n \ ; if \text{ زوج } n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty \\ \\ -۳^n \ ; if \text{ فرد } n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty \end{cases}$$

اگر n زوج باشد، حد دنباله $+\infty$ شده و در نتیجه این دنباله از پایین کران دار بوده(۳) ولی از بالا کران دار نمی باشد و اگر n فرد باشد ، حد دنباله شده و این دنباله از بالا کران دار بوده (۳-) اما از پایین کران دار نمی باشد. در نتیجه کل دنباله نه از بالا و نه از پایین کران دار است.

نکته: اگر دنباله ای یکنوا (صعودی یا نزولی) و کراندار باشد آن گاه همگرا است.

معرفی عدد e (عدد نپر)

دنباله ی $e_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر ۱۰ جمله ی اول این دنباله را به صورت تقریبی محاسبه شده است.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$	۲	۲/۲۵	۲/۳۷۰۳	۲/۴۴۱۴	۲/۴۸۸۳	۲/۵۲۱۶	۲/۵۴۶۵	۲/۵۶۵۷	۲/۵۸۱۱	۲/۵۹۳۷

همان طور که دیده می شود، دنباله ی e_n دنباله ای صعودی بوده و می توان ثابت نمود که این جملات همواره از عدد ۳ کوچک تر باقی می مانند. در نتیجه عدد ۳ یک کران بالا برای دنباله ی e_n محسوب می شود و دنباله ی e_n از بالا کران دار خواهد بود.

بنابراین بنا به نکته ی قبلی، دنباله e_n به عددی همگرا خواهد بود که به آن عدد e می گوییم.

تعریف: حد دنباله ی $e_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ را که عددی حقیقی و گنگ است، عدد نپر نامیده و آن را با e نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$$

تابع نمایی

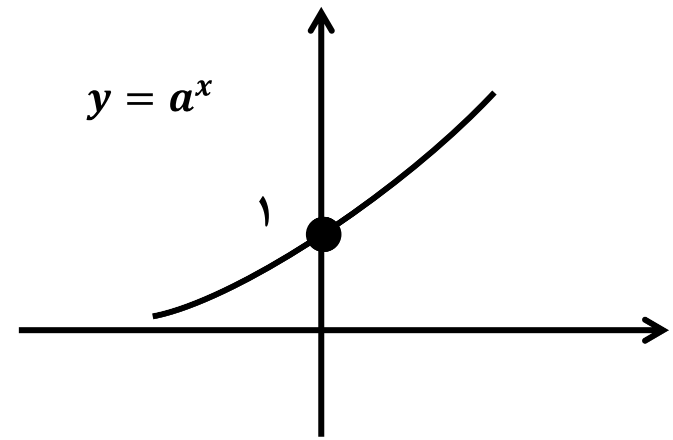
تابع $y = f(x) = a^x$ با شرط $a > ۰$ و $a \neq ۱$ را تابع نمایی می گوییم (x متغیر است).
دامنه ی تابع نمایی R و برد آن $(۰, +\infty)$ می باشد.

رسم تابع نمایی

برای رسم تابع نمایی کافی است ریشه ی عبارت توان را در جدول نوشته، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از آن را در جدول آورده، مقدر y را برای هر یک به دست آوریم.

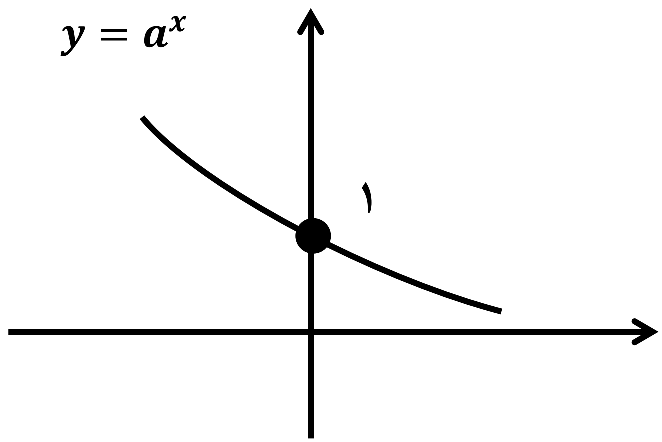
نمودار تابع نمایی با توجه به پایه ی آن (a) ، به یکی از صورت های زیر است:

الف) اگر $a > ۱$:



تابع فوق صعودی و تقعرش رو به بالاست.

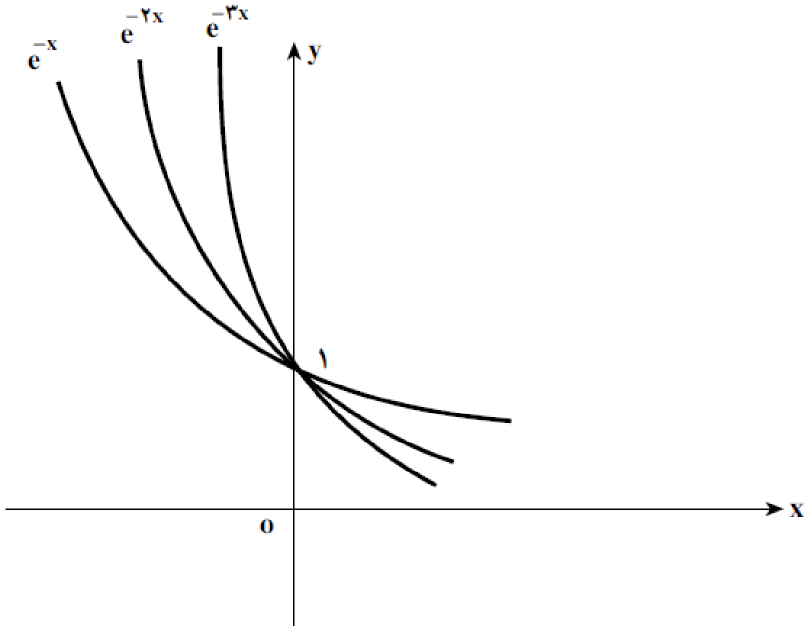
ب) اگر $۰ < a < ۱$:

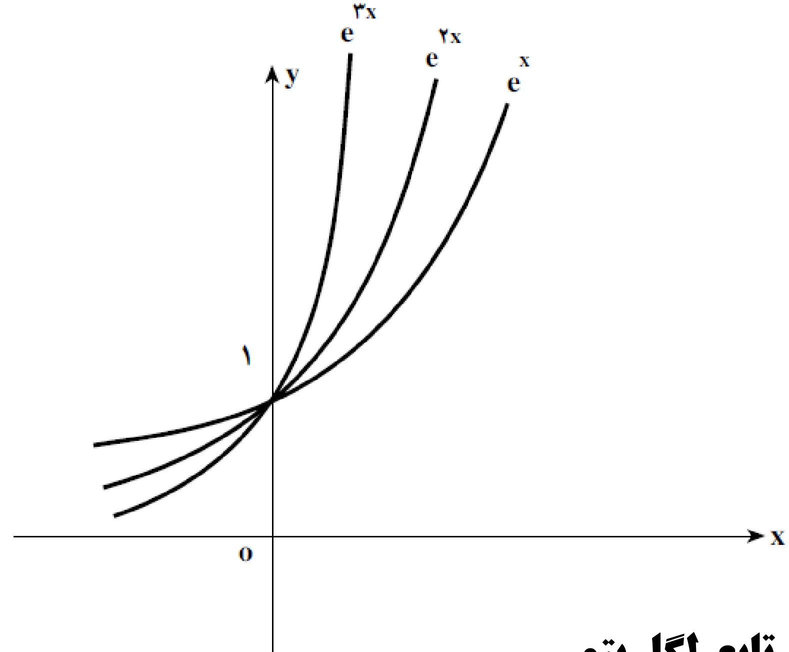


تابع فوق نزولی و تقعرش رو به بالاست.

تابع نمایی طبیعی

در تابع $y = a^x$، اگر به جای a از عدد $e \cong ۲/۷$ (عدد نپر) استفاده کنیم، به تابع حاصل $(y = e^x)$ تابع نمایی طبیعی می گوییم.





تابع لگاریتمی

تابع نمایی، تابعی یک به یک است. بنابراین این تابع وارون پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم و با نماد $y = \log_a^x$ آن را نمایش می دهیم.

در این تابع عدد a را مبنا یا پایه ی لگاریتم می گوییم و $\log_a^x$ را لگاریتم x در مبنا ی (پایه ی) a می خوانیم.

تذکر: هرگاه پایه ی لگاریتم ۱۰ باشد، آن را نمی نویسند. لگاریتمی که پایه اش ده باشد را لگاریتم اعشاری می گویند.

تابع لگاریتم طبیعی

در تابع لگاریتمی، اگر پایه ی لگاریتم عدد نپر (e) باشد، آن را تابع لگاریتم طبیعی می گوییم. $y = \log_a^x \overset{a=e}{\Longrightarrow} y = \log_e^x$

قرارداد: تابع لگاریتم طبیعی را برای سادگی با نماد $\ln x$ نمایش می دهیم و به آن لگاریتم طبیعی x یا لگاریتم نپری x می گوییم.

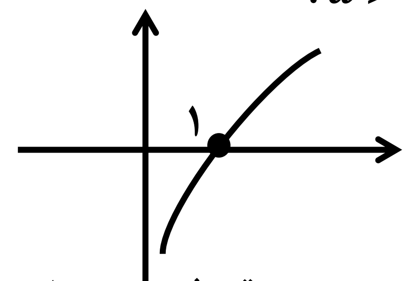
توجه کنید که تابع لگاریتم طبیعی، معکوس تابع نمایی طبیعی است. $f(x) = e^x \Leftrightarrow f^{-۱}(x) = \ln x$

l حرف اول لگاریتم و n حرف اول نپر می باشد.

روش رسم تابع لگاریتمی

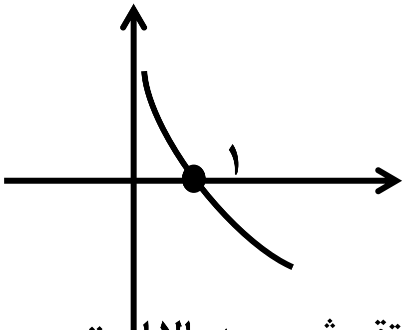
برای رسم این گونه توابع، ابتدا آن ها را به صورت تابع نمایی نوشته و ریشه ی توان این تابع نمایی که برحسب y می باشد را به دست می آوریم و سپس مانند تابع نمایی عمل می کنیم.

الف) اگر $a > ۱$:



این تابع صعودی و تقعرش رو به پایین است.

ب) اگر $۰ < a < ۱$:



این تابع نزولی و تقعرش رو به بالا است.

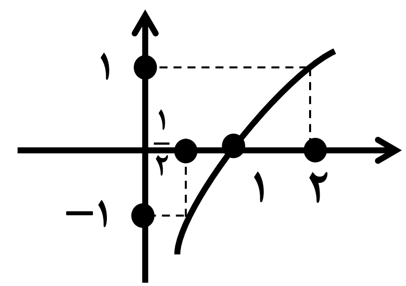
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = \log_{۲}^{x} \quad \Rightarrow x = ۲^{y}$

$\xRightarrow{\text{ریشه ی توان}} y = ۰$

x	$۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$	$۲^{۰} = ۱$	$۲^{۱} = ۲$
y	-۱	۰	۱

$\left(\frac{۱}{۲}, -۱\right)$ $\quad (۱, ۰) \quad (۲, ۱)$

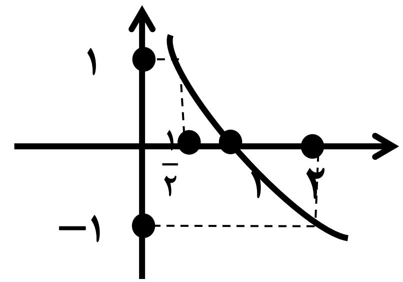


$۲)\ y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{x} \Rightarrow x = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{y}$

$\xrightarrow{\text{ریشه ی توان}} y = ۰$

x	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱} = ۲$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰} = ۱$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱} = \frac{۱}{۲}$
y	-۱	۰	۱

$(۲, -۱)$ $(۱, ۰)$ $\left(\frac{۱}{۲}, ۱\right)$



خواص تابع لگاریتم

۱) $\log_a ۱ = ۰$ (لگاریتم ۱ در هر مبنایی ۰ است)

۲) $\log_a a = ۱$ (لگاریتم هر عدد در مبنای خودش ۱ است)

۳) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

۴) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

۵) $\log_a x^n = n \log_a x$

۶) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$

۷) $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$

۸) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

۹) $\log_a a^x = x$

۱۰) $\log_b a \times \log_a b = ۱$

۱۱) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

۱۲) $a^{\log_a x} = x$

کاربرد تابع نمایی طبیعی: آهنگ رشد و آهنگ زوال

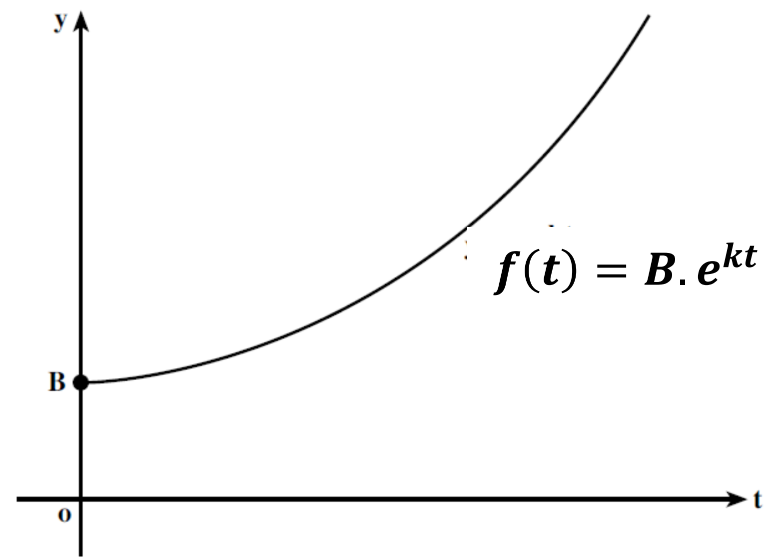
در بسیاری از شاخه های علمی با مدل های ریاضی که شامل توان های e است سر و کار داریم.

بعضی از این مدل ها، همان هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می شوند.

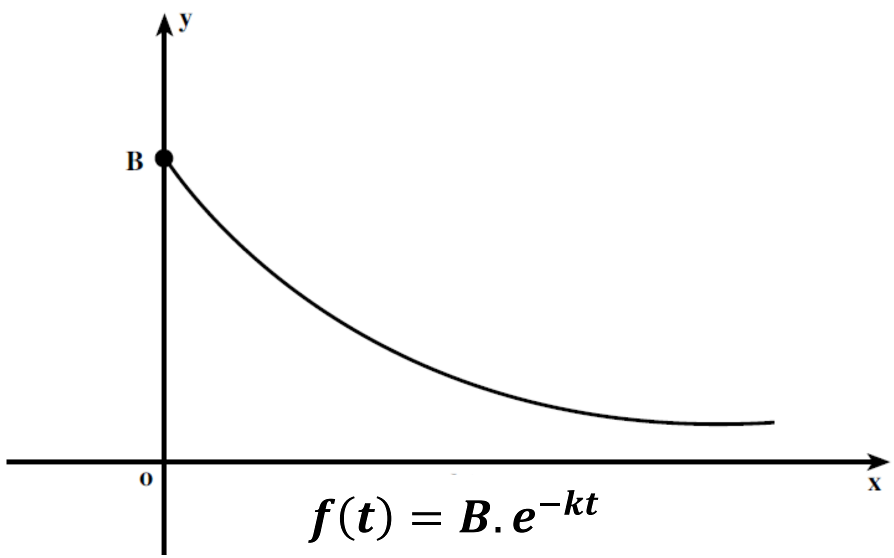
الف) معادله ی $f(t) = B.e^{kt}$ که در آن B مقدار اولیه، k درصد رشد و t زمان است را معادله ی رشد می گوییم.

ب) معادله ی $f(t) = B.e^{-kt}$ که در آن B مقدار اولیه، k درصد رشد و t زمان است را معادله ی زوال می گوییم.

حالت کلی نمودارهای تابع رشد و تابع زوال به صورت زیر است:



تابع رشد



تابع زوال

مثال: در کشت نمونه ای از باکتری ها، تعداد باکتری ها در زمان t از مدل $v(t) = \mathrm{B}.e^{۲t}$ پیروی می کند که در آن B مقدار ثابت و مثبتی است. هرگاه در لحظه ی $t = ۰$ (شروع آزمایش) ۱۰۰۰ باکتری موجود باشد، پس از ۲ ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل: ابتدا B را به دست می آوریم:

$$V(۰) = ۱۰۰۰ \xrightarrow{V(t)=\mathrm{B}.e^{۲t}} ۱۰۰۰ = \mathrm{B}.e^{۲\times۰} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \mathrm{B}.e^{۰} \xrightarrow{e^{۰}=۱} B = ۱۰۰۰$$

پس فرمول تعداد باکتری ها به صورت $v(t) = ۱۰۰۰ \times e^{۲t}$ است.اکنون برای محاسبه ی تعداد باکتری ها پس از ۲ ثانیه، در فرمول $v(t)$ به جای t ، عدد ۲ را قرار می دهیم:

$$v(t) = ۱۰۰۰ \times e^{۲t} \Rightarrow v(t) = ۱۰۰۰ \times e^{۲\times۲} \xrightarrow{e\cong۲/۷} v(t) = ۱۰۰۰ \times (۲/۷)^{۴} \xrightarrow{(۲/۷)^{۴}\cong۵۴} v(t) = ۱۰۰۰ \times ۵۴ = ۵۴۰۰۰$$

مثال: قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می یابد. فرض کنیم $v(t)$ قیمت یک محصول(ابزار یا خودرو) بعد از گذشت t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که $v(t) = \mathrm{B}.e^{-۰/۰۲t}$در آن B مقدار ثابتی است،چنانچه این محصول به قیم ۱۰۰۰۰۰۰ تومان (زمانی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از ۲ سال چه قدر است؟

حل: ابتدا B را به دست می آوریم:

$$v(۰) = ۱۰۰۰۰۰۰ \xrightarrow{v(t)=\mathrm{B}.e^{-۰/۰۲t}} ۱۰۰۰۰۰۰ = \mathrm{B}.e^{-۰/۰۲\times۰} \Rightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = \mathrm{B}.e^{۰} \xrightarrow{e^{۰}=۱} B = ۱۰۰۰۰۰۰$$

پس فرمول قیمت محصول به صورت$v(t) = ۱۰۰۰۰۰۰ \times e^{-۰/۰۲t}$است.اکنون برای محاسبه ی قیمت محصول پعد از ۲ سال، در فرمول $v(t)$ به جای t ، عدد ۲ را قرار می دهیم:

$$v(t) = ۱۰۰۰۰۰۰ \times e^{-۰/۰۲t} \Rightarrow v(t) = ۱۰۰۰۰۰۰ \times e^{-۰/۰۲\times۲} \xrightarrow{e\cong۲/۷} v(t) = ۱۰۰۰۰۰۰ \times (۲/۷)^{-۰/۰۴}$$

$$\xrightarrow{(۲/۷)^{-۰/۰۴}\cong۰/۶۷۰۳۲۰} v(t) = ۱۰۰۰۰۰۰ \times ۰/۶۷۰۳۲۰ = ۶۷۰۳۲۰$$

مثال: فرض کنیم تعداد باکتری ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله ی $f(t) = ۱۵۰۰ \times e^{۰/۰۴t}$ به دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری ها برابر ۳۰۰۰۰ می شود.

حل: فرض کنیم t دقیقه ای باشد که پس از آن تعداد باکتری ها به ۳۰۰۰۰ می رسد. بنابراین داریم:

$$f(t) = ۱۵۰۰ \times e^{۰/۰۴t} \xRightarrow{f(t)=۳۰۰۰۰} ۳۰۰۰۰ = ۱۵۰۰ \times e^{۰/۰۴t} \Rightarrow e^{۰/۰۴t} = \frac{۳۰۰۰۰}{۱۵۰۰} \Rightarrow e^{۰/۰۴t} = ۲۰$$

$$\xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۴t} = \ln ۲۰ \xRightarrow{\ln ۲۰=۲/۹۹۷۵} ۰/۰۴t \ln e = ۲/۹۹۷۵ \xRightarrow{\ln e=۱} t = \frac{۲/۹۹۷۵}{۰/۰۴} = ۷۴/۹\, min$$

پس یک ساعت و ۱۴ دقیقه و ۵۴ ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری ها به ۳۰۰۰۰ برسد.

تذکر: اگر مقدار P ریال را در یک موسسه ی اعتباری نظیر بانک یا شرکت تولیدی با نرخ ۱۰۰i درصد مرکب پیوسته سرمایه گذاری کنیم، آن گاه با فرض آن که سرمایه بعد از t سال را با $A(t)$ نمایش دهیم، داریم: $A(t) = P.e^{it}$

به عنوان مثال؛ اگر مبلغ ۲۰۰ هزار تومان در حساب پس انداز با نرخ ۱۵ درصد پیوسته ی مرکب سرمایه گذاری کنیم، سرمایه بعد از گذشت ۱ سال، ۲ سال و ... به صورت زیر محاسبه می شود:

موجودی پس از یک سال : $۲۰۰۰۰۰ + \left(۲۰۰۰۰۰ \times \frac{۱۵}{۱۰۰}\right) = ۲۰۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰ = ۲۳۰۰۰۰$

موجودی پس از دو سال : $۲۳۰۰۰۰ + \left(۲۳۰۰۰۰ \times \frac{۱۵}{۱۰۰}\right) = ۲۳۰۰۰۰ + ۳۴۵۰۰ = ۲۶۴۵۰۰$

مرکب پیوسته بودن سود بدان معنی است که مثلا بعد از گذشت ۱ سال که موجودی از ۲۰۰۰۰۰ تومان به ۲۳۰۰۰۰ تومان افزایش یافته، این نرخ سود برای سال دوم به مقدار ۲۳۰۰۰۰ تومان تعلق می گیرد.

مثال: شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰۰۰۰ ریال را در یک حساب پس انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته سرمایه گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر می شود؟

حل: در این مثال $\mathrm{A}(t) = ۲ \times ۲۵۰۰۰۰۰۰ = ۵۰۰۰۰۰۰۰$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

اما چون نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته است، داریم: $۱۰۰i = ۱۰ \Rightarrow i = \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۰/۱$

پس معادله ی سرمایه به صورت $\mathrm{A}(t) = ۲۵۰۰۰۰۰۰ \times e^{۰/۱t}$ است.

$$\xRightarrow{\mathrm{A}(t)=۵۰۰۰۰۰۰۰} ۵۰۰۰۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰۰۰ \times e^{۰/۱t} \Rightarrow e^{۰/۱t} = \frac{۵۰۰۰۰۰۰۰}{۲۵۰۰۰۰۰۰} \Rightarrow e^{۰/۱t} = ۲ \xRightarrow{\text{از طرفین } \ln \text{ می گیریم}} \ln e^{۰/۱t} = \ln ۲$$

$$\xRightarrow{\ln ۲ \cong ۰/۷} ۰/۱t \ln e \cong ۰/۷ \xRightarrow{\ln e = ۱} ۰/۱t \cong ۰/۷ \Rightarrow t \cong \frac{۰/۷}{۰/۱} = ۷$$

یعنی تقریبا پس از ۷ سال سرمایه ی شخص دو برابر می شود.

مثال: جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $\mathrm{P}(t)$ باشد، آن گاه $\mathrm{P}(t) = ۱۰۰۰۰ \times e^{۰/۰۶t}$. تا کی انتظار می رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

حل: در این مثال $\mathrm{P}(t) = ۴۵۰۰۰$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

$$\mathrm{P}(t) = ۱۰۰۰۰ \times e^{۰/۰۶t} \xRightarrow{\mathrm{P}(t)=۴۵۰۰۰} ۴۵۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ \times e^{۰/۰۶t} \Rightarrow e^{۰/۰۶t} = \frac{۴۵۰۰۰}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow e^{۰/۰۶t} = ۴/۵$$

$$\xRightarrow{\text{از طرفین } \ln \text{ می گیریم}} \ln e^{۰/۰۶t} = \ln ۴/۵ \xRightarrow{\ln ۴/۵ \cong ۱/۵} ۰/۰۶t \ln e \cong ۱/۵ \xRightarrow{\ln e = ۱} ۰/۰۶t \cong ۱/۵ \Rightarrow t \cong \frac{۱/۵}{۰/۰۶} = ۲۵$$

یعنی تقریبا پس از ۲۵ سال جمعیت شهر به ۴۵۰۰۰ نفر می رسد.

مثال: در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می شود که $f(t) = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t}$ چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

حل: در این مثال $f(t) = ۱۰۰۰۰$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

$$f(t) = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t} \xRightarrow{f(t)=۱۰۰۰۰} ۱۰۰۰۰ = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t} \Rightarrow e^{۰/۰۳۵t} = \frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰۰} \Rightarrow e^{۰/۰۳۵t} = ۵$$

$$\xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۳۵t} = \ln ۵ \xRightarrow{\ln ۵ \cong ۱/۶} ۰/۰۳۵t \ln e \cong ۱/۶ \xRightarrow{\ln e = ۱} ۰/۰۳۵t \cong ۱/۶ \Rightarrow t \cong \frac{۱/۶}{۰/۰۳۵} = ۴۵/۷ \text{ min}$$

یعنی ۱۰۰۰۰ باکتری تقریبا بعد از ۴۶ دقیقه وجود خواهد داشت.

مثال: کارایی کارگر عادی در کارخانه ای با تابع $f(t) = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t}$ داده می شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می تواند روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربه ی کاری، انتظار می رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

حل: در این مثال نیز $f(t) = ۷۰$ و نیز می خواهیم t را به دست آوریم.

$$f(t) = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t} \xRightarrow{f(t)=۷۰} ۷۰ = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t} \Rightarrow ۷۰ - ۱۰۰ = -۶۰e^{-۰/۲t} \Rightarrow -۳۰ = -۶۰e^{۰/۲t} \Rightarrow e^{۰/۲t} = \frac{-۳۰}{-۶۰}$$

$$\Rightarrow e^{۰/۲t} = ۰/۵ \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۲t} = \ln ۰/۵ \xRightarrow{\ln ۰/۵ \cong ۰/۷} ۰/۲t \ln e \cong ۰/۷ \xRightarrow{\ln e = ۱} ۰/۲t \cong ۰/۷ \Rightarrow t \cong \frac{۰/۷}{۰/۲} = ۳/۵$$

مثال: قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، $f(t)$ دلار است، که $f(t) = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می شود؟

حل:

$$f(t) = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t} \xRightarrow{f(t)=۲۰۰۰} ۲۰۰۰ = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t} \Rightarrow ۲۰۰۰ - ۱۲۰۰ = ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t} \Rightarrow ۸۰۰ = ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵}$$

$$\Rightarrow e^{-۰/۲۵t} = \frac{۸۰۰}{۸۰۰۰} \Rightarrow e^{-۰/۲۵t} = ۰/۱ \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{-۰/۲۵t} = \ln ۰/۱ \xrightarrow{\ln ۰/۱ \cong -۲/۳} -۰/۲۵t \ln e \cong -۲/۳$$

$$\xrightarrow{\ln e = ۱} -۰/۲۵t \cong -۲/۳ \Rightarrow t \cong \frac{-۲/۳}{-۰/۲۵} = ۹/۲$$

مثال: چقدر طول می کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰ریال شود؟

حل: $i = ۰/۰۹\ , \mathrm{P} = ۵۰۰۰۰۰\ , \mathrm{A} = ۹۰۰۰۰۰ \Rightarrow t = ?$

$$\mathrm{A} = P.e^{it} \Rightarrow ۹۰۰۰۰۰ = ۵۰۰۰۰۰e^{۰/۰۹t} \Rightarrow e^{۰/۰۹t} = \frac{۹۰۰۰۰۰}{۵۰۰۰۰۰} \Rightarrow e^{۰/۰۹t} = ۱/۸ \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۹t} = \ln ۱/۸$$

$$\xrightarrow{\ln ۱/۸ \cong ۰/۵۹} ۰/۰۹t \ln e \cong ۰/۵۹ \xrightarrow{\ln e = ۱} ۰/۰۹t \cong ۰/۵۹ \Rightarrow t \cong \frac{۰/۵۹}{۰/۰۹} = ۶/۵$$

مثال: چقدر طول می کشد تا یک سرمایه گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

حل: $i = ۰/۰۸, \mathrm{A} = ۲\mathrm{P} \Rightarrow t = ?$

$$\mathrm{A} = P.e^{it} \Rightarrow ۲\mathrm{P} = \mathrm{P}e^{۰/۰۸t} \Rightarrow e^{۰/۰۸t} = \frac{۲\mathrm{P}}{\mathrm{P}} \Rightarrow e^{۰/۰۸t} = ۲ \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۸t} = \ln ۲$$

$$\xrightarrow{\ln ۲ \cong ۰/۷} ۰/۰۸t \ln e \cong ۰/۷ \xrightarrow{\ln e = ۱} ۰/۰۸t \cong ۰/۷ \Rightarrow t \cong \frac{۰/۷}{۰/۰۸} = ۸/۷۵$$

یعنی پس از ۸ سال و $۰/۷۵ \times ۳۶۵ \cong ۲۷۴$ روز سرمایه دو برابر می شود.

معادلات نمایی:

اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ ، آن گاه معادله ی $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ معادل با معادله ی $f(x) = g(x)$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲^{x+۱} + ۲^{x+۲} = ۲۴$

حل:

$$۲^{x+۱} + ۲^{x+۲} = ۲۴ \Rightarrow ۲^{x} \times ۲^{۱} + ۲^{x} \times ۲^{۲} = ۲۴ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } ۲^{x}} ۲^{x}\left(۲^{۱} + ۲^{۲}\right) = ۲۴ \Rightarrow ۲^{x}(۶) = ۲۴ \Rightarrow ۲^{x} = \frac{۲۴}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲^{x} = ۴ \Rightarrow ۲^{x} = ۲^{۲} \Rightarrow x = ۲$$

ب) $(۱۳^{x})^{x+۳} - \frac{۱}{۱۶۹} = ۰$

حل:

$$(۱۳^{x})^{x+۳} - \frac{۱}{۱۶۹} = ۰ \Rightarrow ۱۳^{x\times(x+۳)} - \frac{۱}{۱۳^{۲}} = ۰ \Rightarrow ۱۳^{x^{۲}+۳x} = \frac{۱}{۱۳^{۲}} \xrightarrow{\frac{۱}{۱۳^{۲}}=۱۳^{-۲}} ۱۳^{x^{۲}+۳x} = ۱۳^{-۲} \Rightarrow x^{۲} + ۳x = -۲$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، پس از ساده سازی به کمک خواص لگاریتم، به یکی از دو حالت زیر می رسیم:

الف) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

در این حالت کمان های لگاریتم را مساوی هم قرار داده $(f(x) = g(x))$ و معادله ی حاصل را حل می کنیم تا جواب به دست آید.

توجه داشته باشید که جواب هایی از x قابل قبول است که در دامنه ی توابع لگاریتمی باشند.
برای این کار جواب های به دست آمده را در معادله قرار می دهیم. اگر به لگاریتم عدد منفی نرسیم و در نهایت به یک تساوی درست برسیم، جواب قابل قبول است.

مثال: معادله ی $\log^{3} = \log^{(x-1)} + \log^{(x+1)}$ را حل کنید.

حل:

$$\Rightarrow \log^{(x^{2}-1)} = \log^{3} \Rightarrow x^{2}-1=3 \Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

از بین جواب های به دست آمده $x = -2$ قابل قبول نمی باشد. زیرا کمان های $\log^{(x-1)}$ و $\log^{(x+1)}$ به ازای آن منفی شوند.

ب) $\log_{a}^{f(x)} = b$

در این حالت از تعریف لگاریتم استفاده کرده و به تساوی $f(x) = a^{b}$ رسیده و معادله را حل کرده و در نهایت جواب های به دست آمده را چک می کنیم.

مثال: معادله ی $\log_{\frac{1}{3}}^{x} = -4$ را حل کنید.

حل:

$$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Rightarrow x=\left(\frac{3}{1}\right)^{4} \Rightarrow x=81 \text{ ق.ق}$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{2}^{(x-1)} = 3 \Rightarrow x-1=2^{3} \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9$

ب) $\log_{\frac{1}{9}}^{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=\sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^{5}} \Rightarrow x=\sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^{4}.\left(\frac{1}{9}\right)} \Rightarrow x=\left(\frac{1}{9}\right)^{2}\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{81}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{243}$

ج) $\log^{(۳x+۱)} = ۲ \Rightarrow ۳x+۱ = ۱۰^{۲} \Rightarrow ۳x+۱ = ۱۰۰ \Rightarrow ۳x = ۹۹ \Rightarrow x = ۳۳$ ق.ق

د) $\log^{(۲x-۱)} + \log^{(x-۷)} = \log^{۷} \Rightarrow \log^{(۲x-۱)(x-۷)} = \log^{۷} \Rightarrow (۲x-۱)(x-۷) = ۷$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۵x + ۷ = ۷ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۵x = ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} x(۲x-۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ.ق.ق} \\ ۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{۱۵}{۲} \end{cases}$$

ه) $۲\log^{x} - \log^{(x+۱)} = ۱ \Rightarrow \log^{x^{۲}} - \log^{(x+۱)} = ۱ \Rightarrow \log^{\frac{x^{۲}}{x+۱}} = ۱ \Rightarrow \dfrac{x^{۲}}{x+۱} = ۱۰^{۱} = ۱۰$

$$\Rightarrow x^{۲} = ۱۰(x+۱) \Rightarrow x^{۲} = ۱۰x + ۱۰ \Rightarrow x^{۲} - ۱۰x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \dfrac{۱۰ + \sqrt{۱۶۰}}{۲} \\ x_{۲} = \dfrac{۱۰ - \sqrt{۱۶۰}}{۲} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

و) $(۲^{x} - ۱)(۲^{x} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲^{x} - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲^{x} = ۱ \Rightarrow ۲^{x} = ۲^{۰} \Rightarrow x = ۰ \\ ۲^{x} - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲^{x} = ۳ \end{cases}$

برای حل معادله ی $۲^{x} = ۳$،چون این معادله نمایی نیست از روش دیگری استفاده می کنیم. به این صورت که از طرفین تساوی لگاریتم می گیریم.

$$\log^{۲^{x}} = \log^{۳} \Rightarrow x\log^{۲} = \log^{۳} \Rightarrow x = \frac{\log^{۳}}{\log^{۲}} \xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} x = \log_{۲}^{۳}$$

ز) $۱۰^{\log^{(x+۱)}} = ۳ \xrightarrow{a^{\log_a x} = x} x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x-۳)=۲ \Rightarrow \ln(x-۳)=\log_e^{(x-۳)}=۲ \Rightarrow e^۲=x-۳ \Rightarrow x=e^۲+۳$

ب) $(e^x-۵)(۲e^x-۷)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x-۵=۰ \Rightarrow e^x=۵ \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x=\ln ۵ \Rightarrow x\ \ln e=\ln ۵ \xRightarrow{\ln e=۱} x=\ln ۵ \\ ۲e^x-۷=۰ \Rightarrow ۲e^x=۷ \Rightarrow e^x=\frac{۷}{۲} \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x=\ln\frac{۷}{۲} \Rightarrow x\ \ln e=\ln\frac{۷}{۲} \xRightarrow{\ln e=۱} x=\ln\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

ج) $(e^x+۳)^۲-۲۵=۰$

$$\Rightarrow (e^x+۳)^۲=۲۵ \xRightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} \sqrt{(e^x+۳)^۲}=\sqrt{۲۵} \Rightarrow |e^x+۳|=۵ \xRightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} e^x+۳=\pm ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x+۳=۵ \Rightarrow e^x=۲ \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x=\ln ۲ \Rightarrow x\ \ln e=\ln ۲ \xRightarrow{\ln e=۱} x=\ln ۲ \\ e^x+۳=-۵ \Rightarrow e^x=-۸ \end{cases}$$

این حالت امکان ندارد. زیرا e^x عددی مثبت است و هیچ گاه برابر عددی منفی نمی شود. $(e^x>۰)$

د) $\ln(۴x-۵)=\ln(۲-x)$

$$\xRightarrow{\text{به دو طرف پایه ی } e \text{ می دهیم}} e^{\ln(۴x-۵)}=e^{\ln(۲-x)} \xRightarrow{a^{\log_a x}=x} ۴x-۵=۲-x \Rightarrow ۴x+x=۲+۵ \Rightarrow ۵x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

در معادلات شامل ln جوابی قابل قبول است که کمان ln را منفی نکند. (مانند معادلات لگاریتمی) در معادله ی بالا کمان هر دو طرف تساوی ($\ln(۴x-۵)=\ln(۲-x)$) به ازای $x=۱/۴$ بزرگتر از صفر است.

ه) $|e^x - ۱| = |۳ - ۲e^x| \xRightarrow{|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y} e^x - ۱ = \pm(۳ - ۲e^x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x - ۱ = ۳ - ۲e^x \Rightarrow e^x + ۲e^x = ۳ + ۱ \Rightarrow ۳e^x = ۴ \Rightarrow e^x = \frac{۴}{۳} \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln\frac{۴}{۳} \\ \Rightarrow x \ \ln e = \ln\frac{۴}{۳} \xRightarrow{\ln e=۱} x = \ln\frac{۴}{۳} \\ e^x - ۱ = -۳ + ۲e^x \Rightarrow e^x - ۲e^x = -۳ + ۱ \Rightarrow -e^x = -۲ \Rightarrow e^x = ۲ \xRightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln ۲ \\ \xRightarrow{\ln e=۱} x = \ln\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

و) $\ln(۲x - ۱) + \ln(x - ۷) = \ln ۷ \xRightarrow{\text{خواص لگاریتم}} \ln(۲x - ۱)(x - ۷) = \ln ۷ \Rightarrow (۲x - ۱)(x - ۷) = ۷$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۵x + ۷ = ۷ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۵x = ۰ \Rightarrow x(۲x - ۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \ \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵ \end{cases}$$

مثال: اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که:

$$\begin{cases} \ln x + \ln ۲y = \ln(xy + ۲) \ (\mathrm{I}) \\ \ln(۱ - x) + \ln(y + ۱) = \ln(y - x - ۱) \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

حل:

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \ln ۲xy = \ln(xy + ۲) \Rightarrow ۲xy = xy + ۲ \Rightarrow ۲xy = xy = ۲ \Rightarrow xy = ۲ \ (*)$$

$$(\mathrm{II}) \Rightarrow \ln(۱ - x)(y + ۱) = \ln(y - x - ۱) \Rightarrow (۱ - x)(y + ۱) = (y - x - ۱) \Rightarrow y + ۱ - xy - x = y - x - ۱$$

$\Rightarrow xy = ۲ \ (**) \xRightarrow{\text{از } (*) \text{ و } (**)} ۲ = ۲ \Rightarrow$ دستگاه بی شمار جواب دارد

معادله ی مثلثاتی:

معادلاتی که برحسب نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می شوند را معادله مثلثاتی می نامیم.

به عنوان مثال $cos^{2}x + sinx = ۰$ و $۲cosx = ۱$ و ... معادله هایی مثلثاتی هستند.

حل معادله ی مثلثاتی:

برای حل هر معادله ی مثلثاتی از روابط مثلثاتی و دستورهای جبری مانند تجزیه کردن استفاده می کنیم تا معادله به صورت ساده تری تبدیل شود. پس از ساده کردن عبارت های مثلثاتی، معادله به یکی از صورت های زیر حل می شود:

حالت اول: اگر داشته باشیم $sinx = \mathrm{a}$ که $-۱ \leq \mathrm{a} \leq ۱$. ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $\mathrm{a} = sin\alpha$.
در این صورت داریم:

$$۱)\ sinx = sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi - \alpha \\ \\ x = ۲k\pi + \alpha \end{cases}$$

تذکر: اگر $\mathrm{a} > ۱$ یا $\mathrm{a} < -۱$ در این صورت معادله ی مثلثاتی چواب ندارد.

حالت دوم: اگر داشته باشیم $cosx = \mathrm{a}$ که $-۱ \leq \mathrm{a} \leq ۱$. ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $\mathrm{a} = cos\alpha$.
در این صورت داریم:

$$۲)\ cosx = cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$

تذکر: اگر $\mathrm{a} > ۱$ یا $\mathrm{a} < -۱$ در این صورت معادله ی مثلثاتی چواب ندارد.

حالت سوم: اگر داشته باشیم $tanx = \mathrm{a}$ ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $\mathrm{a} = tan\alpha$. در این صورت داریم:

$$۳)\ tanx = tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالت چهارم: اگر داشته باشیم $cotgx = \mathrm{a}$ ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $\mathrm{a} = cotg\alpha$. در این صورت داریم:

$$۴)\ cotgx = cotg\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالات خاص: هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است امّا در چند حالات خاص زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد.

۱) $sinx = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۲) $sinx = ۰ \Rightarrow x = k\pi$

۳) $sinx = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

۴) $cosx = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$

۵) $cosx = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۶) $cosx = -۱ \Rightarrow x = (۲k + ۱)\pi$

۷) $tanx = ۰ \Rightarrow x = k\pi$

۸) $cotgx = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

زاویه ها و اندازه ی نسبت های مثلثاتی آن ها:

زاویه	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$
	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰
$sin\,\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱
$cos\,\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰
$tan\,\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$cot\,\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰

فرمول های مثلثاتی:

$$۱)\ sin^۲x + cos^۲x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} sin^۲x = ۱ - cos^۲x \\ cos^۲x = ۱ - sin^۲x \end{cases}$$

$$۲) sin^۲x + cos^۲x = ۱ \Rightarrow \frac{sin^۲x}{cos^۲x} + \frac{cos^۲x}{cos^۲x} = \frac{۱}{cos^۲x} \Rightarrow ۱ + tan^۲x = \frac{۱}{cos^۲x}$$

$$۳) sin^۲x + cos^۲x = ۱ \Rightarrow \frac{sin^۲x}{sin^۲x} + \frac{cos^۲x}{sin^۲x} = \frac{۱}{sin^۲x} \Rightarrow ۱ + cotg^۲x = \frac{۱}{sin^۲x}$$

$$۴)\ sin۲x = ۲sinxcosx$$

$$۵)\ cos۲x = cos^۲x - sin^۲x \Rightarrow \begin{cases} cos۲x = ۲cos^۲x - ۱ \\ cos۲x = ۱ - ۲sin^۲x \end{cases}$$

$$۶)\ sin(a \pm b) = sinacosb \pm cosasinb$$

$$۷)\ cos(a \pm b) = cosacosb \mp sinasinb$$

نسبت های مثلثاتی کمان های مختلف:

$$\begin{cases} sin(-\alpha) = -sin\alpha \\ cos(-\alpha) = cos\alpha \\ tan(-\alpha) = -tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin(\pi - \alpha) = sin\alpha \\ cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha \\ tan(\pi - \alpha) = -tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha \\ cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha \\ tan(\pi + \alpha) = tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin(۲\pi - \alpha) = -sin\alpha \\ cos(۲\pi - \alpha) = +cos\alpha \\ tan(۲\pi - \alpha) = -tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin(۲\pi + \alpha) = +sin\alpha \\ cos(۲\pi + \alpha) = +cos\alpha \\ tan(۲\pi + \alpha) = +tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cos\alpha \\ cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = sin\alpha \\ tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cotg\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = cos\alpha \\ cos\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -sin\alpha \\ tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -cotg\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha\right) = -cos\alpha \\ cos\left(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha\right) = -sin\alpha \\ tan\left(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha\right) = cotg\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right) = -cos\alpha \\ cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right) = +sin\alpha \\ tan\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right) = -cotg\alpha \end{cases}$$

نکته: در حالتی که $cosx$ و $cotx$ برابر مقادیر منفی باشند، از $(\pi-\alpha)$ استفاده می کنیم. مثلا اگر $cosx=-\frac{۱}{۲}$ در این صورت $cosx=cos\left(\pi-\frac{\pi}{۳}\right)$.

در حالتی که $sinx$ و $tanx$ برابر مقادیر منفی باشند، از $(-\alpha)$ استفاده می کنیم. مثلا اگر $sinx=-\frac{۱}{۲}$ در این صورت $sinx=sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$.

انواع معادلات مثلثاتی:

الف) معادلات ساده ی مثلثاتی نوع اول:

معادلاتی که شامل یکی از مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه ی مجهول باشد را، معادله ی مثلثاتی نوع اول می گوییم.

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب های کلی آن را بیابید.

۱) $۲\,sinx-\sqrt{۳}=۰$

حل:

$$۲\,sinx-\sqrt{۳}=۰\Rightarrow ۲\,sinx=\sqrt{۳}\Rightarrow sinx=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow sinx=sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

۲) $۲\,cosx-\sqrt{۲}=۰$

$$۲\,cosx-\sqrt{۲}=۰\Rightarrow ۲\,cosx=\sqrt{۲}\Rightarrow cosx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow cosx=cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

$$۳)\ ۲\ sinx + \sqrt{۲} = ۰$$

$$۲\ sinx + \sqrt{۲} = ۰ \Rightarrow ۲\ sinx = -\sqrt{۲} \Rightarrow sinx = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow sinx = sin - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{۴}\right) \\ x = ۲k\pi + \left(-\frac{\pi}{۴}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$۴)\ ۲\ cosx + ۱ = ۰$$

$$۲\ cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲cosx = -۱ \Rightarrow cosx = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow cosx = cos\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow cosx = cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

مثال: معادله ی $۴cos^۲x - ۹cosx + ۵ = ۰$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: این معادله به یک معادله ی درجه دوم شبیه است با فرض $cosx = t$ داریم: $۴t^۲ - ۹t + ۵ = ۰$

چون جمع ضرایب صفر است بنابراین یکی از ریشه ها $t_۱ = ۱$ و دیگری $t_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۴}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱ \Rightarrow cosx = ۱ \xRightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi \\ t_۲ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow cosx = \frac{۵}{۴}; \text{ چون } -۱ \le cosx \le ۱ \text{ پس جواب غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $۲tan^۲x-۳tanx+۱=۰$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: این معادله نیز به یک معادله ی درجه دوم شبیه است با فرض $tanx=t$ داریم: $۲t^۲-۳t+۱=۰$

چون جمع ضرایب صفر است بنابراین یکی از ریشه ها $t_۱=۱$ و دیگری $t_۲=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$ است.

$$\Rightarrow\begin{cases} t_۱=۱\Rightarrow tanx=۱\Rightarrow tanx=tan\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ t_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow tanx=\frac{۱}{۲};\xRightarrow{\text{(چون جواب آن را نمی دانیم، فرض می کنیم که } \alpha \text{ زاویه ای است که تانژانت آن برابر } \frac{۱}{۲} \text{ است.)}} tanx=tan\alpha \end{cases}$$

مثال: معادله ی $۲cos^۳x-cosx=۰$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: ابتدا از $cosx$ فاکتورگیری می کنیم.

$$cosx(۲cos^۲x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} cosx=۰\xRightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ ۲cos^۲x-۱=۰\Rightarrow ۲cos^۲x=۱\Rightarrow cos^۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow cosx=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} cosx=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow cosx=cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pm\frac{\pi}{۴} \\ cosx=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow cosx=cos\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=cos\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $tan^۲x = ۳$ را حل کرده و جواب های در بازه ی $[۰,۲\pi]$ را به دست آورید.

$$tan^۲x = ۳ \Rightarrow tanx = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} tanx = \sqrt{۳} \Rightarrow tanx = tan\dfrac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{۳} \\ \\ tanx = -\sqrt{۳} \Rightarrow tanx = tan\left(-\dfrac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

برای یافتن جواب های مورد نظر در بازه ی k به اعداد صحیح ۰ و $\pm$۱ و $\pm$۲ و ... را می دهیم تا جواب های مورد نظر به دست آید.

k	-۱	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$	$-\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۳}$
$x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$	$-\frac{۴\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$

ب) معادلات ساده ی مثلثاتی نوع دوم:

معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویه ی مجهول می باشد را معادله ی مثلثاتی نوع دوم می گوییم.

مثال: معادلاتی مانند $cos^۲x + sinx = ۱$ و $tanx + ۲cotgx = ۳$ و $sinxcosx - sinx = ۰$ که چند نسبت مثلثاتی از زاویه ی x را در بر می گیرند، معادلات ساده ی مثلثاتی نوع دوم می باشند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با انتقال تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل نسبت ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل ها بتوان معادله را به معادلات ساده تر تبدیل کرده و بعد جواب های معادله را به دست آوریم.

مثال: معادله ی مثلثاتی $۲sin^۲x = cosx - ۱$ را حل کنید.

حل: می توان همه نسبت ها را به کسینوس تبدیل کرد. داریم:

$$sin^۲x = ۱ - cos^۲x \Rightarrow ۲(۱ - cos^۲x) = cosx - ۱ \Rightarrow ۲ - ۲cos^۲x = cosx - ۱$$

$$\Rightarrow ۲cos^۲x + cosx - ۳ = ۰ \xRightarrow{cosx=t} ۲t^۲ + t - ۳ = ۰ \xRightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} t_۱ = ۱\,, t_۲ = \frac{-۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱ \Rightarrow cosx = ۱ \xRightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi \\ \\ t_۲ = \dfrac{-۳}{۲} \Rightarrow cosx = \dfrac{-۳}{۲} < -۱ (\text{غ .ق .ق}) \end{cases}$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $tanx - ۲cotgx = ۱$ را حل کنید.

حل: برای حل این معادله باید قرار دهیم: $cotgx = \frac{۱}{tanx}$ در این صورت معادله به صورت زیر در می آید:

$$tanx - ۲ \times \frac{۱}{tanx} = ۱ \Rightarrow tanx - \frac{۲}{tanx} = ۱$$

چون $tanx \neq ۰$ پس طرفین معادله را در $tanx$ ضرب می کنیم.

$$tanx\left(tanx - \frac{۲}{tanx}\right) = tanx(۱) \Rightarrow tan^۲x - ۲ = tanx \Rightarrow tan^۲x - tanx - ۲ = ۰ \xRightarrow{tanx=t}$$

$$t^۲ - t - ۲ = ۰ \xRightarrow{a-b+c=۰} t_۱ = -۱\,, t_۲ = \frac{-۲}{۱} = -۲ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = -۱ \Rightarrow tanx = tan\left(-\dfrac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow x = k\pi - \\ \\ t_۲ = -۲ \Rightarrow tanx = -۲ \Rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

(چون جواب آن را نمی دانیم، فرض می کنیم که α زاویه ای است که تانژانت آن برابر -۲ است.)

مثال: معادله ی مثلثاتی $sinx + cosx + sinxcosx + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل: با فاکتورگیری از $sinx$ در جملات حاوی $sinx$ به معادله ی زیر می رسیم:

$$sinx(۱ + cosx) + (cosx + ۱) = ۰ \Rightarrow (cosx + ۱)(sinx + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow cosx = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi + \pi \\ sinx + ۱ = ۰ \Rightarrow sinx = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $cos۲x = sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$ را حل کنید.

حل: می دانیم $sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = cosx$ بنابراین معادله به صورت زیر در می آید:

$$cos۲x = cosx \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x - x = ۲k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۲x + x = ۲k\pi \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}k\pi \end{cases}$$

روش دوم: از تساوی $cos۲x = ۲cos^۲x - ۱$ استفاده کرده و در معادله $cos۲x = cosx$جایگذاری می کنیم.

$$۲cos^۲x - ۱ = cosx\left(\text{حل به عهده دانش آموز}\right)$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $sin۴x + sin۳x = ۰$ را حل کرده و جواب های در بازه ی $[۰ , \pi]$ را بیابید.

حل:

$$sin۴x + sin۳x = ۰ \Rightarrow sin۴x = -sin۳x \Rightarrow sin۴x = sin(-۳x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \pi - (-۳x) \Rightarrow ۴x - ۳x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \\ ۴x = ۲k\pi + (-۳x) \Rightarrow ۴x + ۳x = ۲k\pi \Rightarrow ۷x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}k\pi \end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$۰, \pi$	$\frac{۲\pi}{۷}$	$\frac{۴\pi}{۷}$	$\frac{۶\pi}{۷}$

مثال: معادله های مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=sin۲x$

حل: می دانیم: $cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=-sinx$ بنابراین داریم. **روش اول:**

$$-sinx=sin۲x\Rightarrow sin۲x=sin(-x)\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\pi-(-x)\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\pi+x\\ \Rightarrow x=۲k\pi+\pi\\ ۲x=۲k\pi+(-x)\Rightarrow ۳x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}k\pi\end{cases}$$

روش دوم: از تساوی $sin۲x=۲sinxcosx$ استفاده کرده و در معادله ی $-sinx=sin۲x$ جایگذاری می کنیم.

$$۲sinxcosx=-sinx\Rightarrow ۲sinxcosx+sinx=۰$$ (حل به عهده دانش آموز)

ب) $\frac{۲}{tanx+cotgx}=\frac{۱}{۲}$

حل:

$$\frac{۲}{tanx+cotgx}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}tanx+cotgx=۴\Rightarrow\frac{sinx}{cosx}+\frac{cosx}{sinx}=۴\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{sin^۲x+cos^۲x}{cosx.sinx}=۴$$

$$\xrightarrow{sin^۲x+cos^۲x=۱}\frac{۱}{sinx.cosx}=۴\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۴sinx.cosx=۱\Rightarrow ۲(۲sinx.cosx)=۱\xrightarrow{۲sinxcosx=sin۲x}$$

$$۲sin۲x=۱\Rightarrow sin۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow sin۲x=sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\\ \Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\\ ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کرده و جواب های کلی آن ها را بیابید.

۱) $۲sin۲x - ۱ = ۰$

۲) $۲cosx + \sqrt{۳} = ۰$

۳) $sin۲x + sinx = ۰$

۴) $tanx = ۳cotgx$

۵) $۲sin^{۲}۲x - sin۲x - ۱ = ۰$

۶) $sin۲x = cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$

۷) $sin۲xcosx - cos۲xsinx = ۱$

۸) $cos۲x - ۳cosx + ۲ = ۰$

۹) $cos^{۲}x - sin^{۲}x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰) $cosx - cos^{۳}x = ۰$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱/ پیش دانشگاهی تجربی/فصل سوم:

مشتق توابع

یادآوری و تکمیل

سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شدیم.

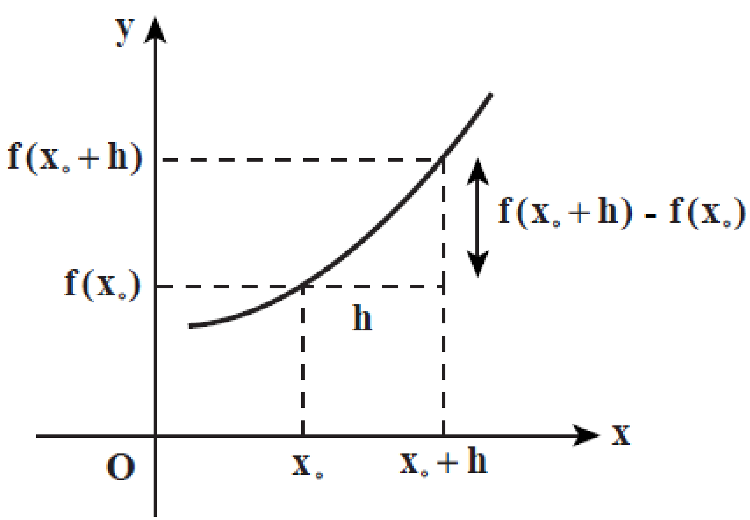
برای یک تابع مانند f با تغییر مقدارهای متغیر x ، مقادیر $f(x)$ نیز تغییراتی می کند.

مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می دهد.

در یک نقطه مانند $x_{\circ}$ از دامنه ی تابع f ، اگر به اندازه ی h واحد از $x_{\circ}$ دور شویم آن گاه مقدار تابع از $f(x_{\circ})$ به $f(x_{\circ}+h)$ تغییر می کند.

میزان تغییرات f به اندازه ی $f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})$ و میزان تغییرات x به اندازه ی h است.

کسر $\dfrac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}$ نسبت این تغییرات را حساب می کند و حد آن در $h \longrightarrow \circ$ (در صورت وجود) مشتق f در $x_{\circ}$ نامیده می شود و آن را با $f'(x_{\circ})$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:



$$f'(x_{\circ}) = \lim_{h \longrightarrow \circ} \frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه ی دلخواه مانند $x_۰$ که $x_۰ \in (۰,+\infty)$ را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} f(x_۰)=\sqrt{x_۰} \\ \\ f(x_۰+h)=\sqrt{x_۰+h} \end{cases}$$

$$f'(x_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_۰+h}-\sqrt{x_۰}}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xRightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x_۰+h}-\sqrt{x_۰}}{h}\times\frac{\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}}{\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(\sqrt{x_۰+h}-\sqrt{x_۰}\right)\left(\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}\right)}{h\left(\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}\right)}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(\sqrt{x_۰}+h\right)^{۲}-\left(\sqrt{x_۰}\right)^{۲}}{h\left(\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}\right)}=\lim_{h\to ۰}\frac{x_۰+h-x_۰}{h\left(\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}\right)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h\left(\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}\right)}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x_۰+h}+\sqrt{x_۰}}=\frac{۱}{\sqrt{x_۰+۰}+\sqrt{x_۰}}=\frac{۱}{\sqrt{x_۰}+\sqrt{x_۰}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x_۰}}\Rightarrow f'(x_۰)=\frac{۱}{۲\sqrt{x_۰}}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{۴h} = ۵x$ باشد آن گاه حاصل $۲f'(۴)$ را به دست آورید.

حل:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{۴h} = ۵x \Rightarrow \frac{۱}{۴}\left(\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = ۵x \xRightarrow{\text{تعریف مشتق}} \frac{۱}{۴} f'(x) = ۵x \Rightarrow f'(x) = ۲۰x$$

$$\Rightarrow f'(۴) = ۲۰(۴) = ۸۰ \Rightarrow ۲f'(x) = ۲(۸۰) = ۱۶۰$$

مثال: اگر $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۳h} = -\frac{۱}{۳}$ باشد آن گاه حاصل $۳f'(۲)$ را به دست آورید.

حل:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۳h} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\left(\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\right) = -\frac{۱}{۳} \xRightarrow{\text{تعریف مشتق}} \frac{۱}{۳} f'(۲) = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow f'(۲) = -۱$$

$$\Rightarrow ۳f'(۲) = ۳(-۱) = -۳$$

تعریفی دیگر برای مشتق: اگر a نقطه ای متعلق به دامنه ی تابع f باشد، در این صورت مشتق تابع f در نقطه ی a را که با $f'(a)$ نمایش می دهیم از رابطه ی زیر نیز می توانیم به دست آوریم:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

هم چنین اگر بخواهیم مشتق تابع f در نقطه ی $x_. \in D_f$ را به دست آوریم، به صورت زیر است:

$$f'(x_.) = \lim_{x\to x_.} \frac{f(x)-f(x_.)}{x-x_.}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه ی $a\in D_f$ به دست آورید.

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{xa(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-۱}{xa}=\frac{-۱}{aa}=\frac{-۱}{a^{۲}}$$

مثال: مشتق تابع $y=x^{۳}$ را از طریق تعریف در نقطه ی دلخواه $x=a$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xRightarrow{f(x)=x^{۳},f(a)=a^{۳}}f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}-a^{۳}}{x-a}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \text{مبهم}$$

$$\xRightarrow{\text{رفع ابهام با استفاده تجزیه}}\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{۲}+ax+a^{۲}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}x^{۲}+ax+a^{۲}=a^{۲}+a\times a+a^{۲}=۳a^{۲}$$

مشتق پذیری:

فرض کنیم تابع f در یک بازه ی باز حول یک نقطه ی $x_{\cdot}$ تعریف شده باشد. اگر $\lim_{h\to \cdot}\frac{f(x_{\cdot}+h)-f(x_{\cdot})}{h}$ یا $\lim_{x\to x_{\cdot}}\frac{f(x)-f(x_{\cdot})}{x-x_{\cdot}}$ **موجود** و **متناهی** باشد، آن را مشتق تابع f در $x_{\cdot}$ نامیده و با $f'(x_{\cdot})$ نشان می دهیم.

مشتق های یک طرفه: همان طور که گفته شد، برای محاسبه مشتق تابع f در نقطه ی $x_{\cdot}$ باید یکی از حدود زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to x_{\cdot}}\frac{f(x)-f(x_{\cdot})}{x-x_{\cdot}} \qquad\qquad \lim_{h\to \cdot}\frac{f(x_{\cdot}+h)-f(x_{\cdot})}{h}$$

اگر در محاسبه این حدها، ابتدا و **در صورت نیاز**، حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به دست آمده را مشتق چپ و راست f در $x_{\cdot}$ می نامیم. بنابراین مشتق های چپ و راست f در $x_{\cdot}$ به صورت زیر نشان داده می شوند:

مشتق **راست** تابع f در نقطه ی $x_{\cdot}$:

$$\lim_{x\to x_{\cdot}^{+}}\frac{f(x)-f(x_{\cdot})}{x-x_{\cdot}}=f'_{+}(x_{\cdot}) \qquad \text{یا} \qquad \lim_{h\to \cdot^{+}}\frac{f(x_{\cdot}+h)-f(x_{\cdot})}{h}=f'_{+}(x_{\cdot})$$

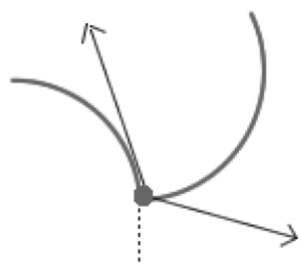
مشتق **چپ** تابع f در نقطه ی $x_{\cdot}$:

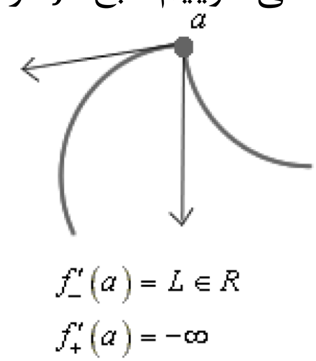
$$\lim_{x\to x_{\cdot}^{-}}\frac{f(x)-f(x_{\cdot})}{x-x_{\cdot}}=f'_{-}(x_{\cdot}) \qquad \text{یا} \qquad \lim_{h\to \cdot^{-}}\frac{f(x_{\cdot}+h)-f(x_{\cdot})}{h}=f'_{-}(x_{\cdot})$$

در محاسبه مشتق های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوییم تابع مشتق پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

بررسی نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست

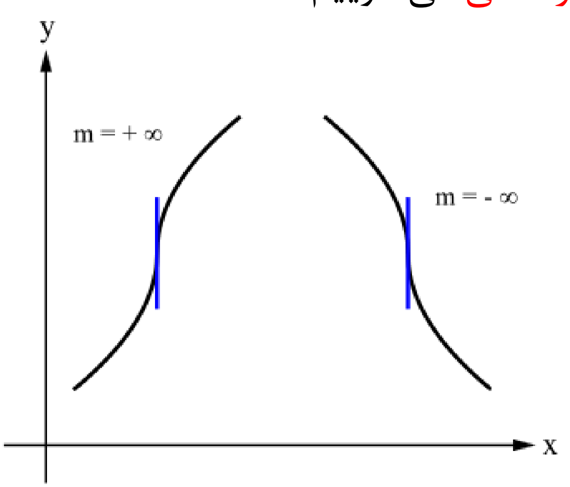
الف) اگر تابع f در نقطه ی x_0 پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه ی x_0 «متناهی و نابرابر» یا «یکی عدد و دیگری ∞»باشد، در این صورت می گوییم تابع f در نقطه ی x_0 مشتق پذیر نیست و این نقطه را نقطه ی زاویه دار منحنی می گوییم.





ب) اگر تابع f در نقطه ی x_0 پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه ی x_0، یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود،

در این صورت می گوییم تابع f در نقطه ی x_0 مشتق پذیر نیست و این نقطه را نقطه ی بازگشتی می گوییم.



ج) اگر تابع f در نقطه ی x_0 پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه ی x_0، هر دو $+\infty$ و یا هر دو $-\infty$ شود،

در این صورت می گوییم تابع f در نقطه ی x_0 مشتق پذیر نیست و این نقطه را نقطه ی عطف می گوییم.

مثال: مشتق های چپ و راست تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه ی $x_{\cdot} = \cdot$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع $f(x) = |x|$ در نقطه ی $x_{\cdot} = \cdot$ را بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \to \cdot^+} f(x) = \lim_{x \to \cdot^-} f(x) = f(\cdot) = \cdot$$

مشتق راست:

$$\lim_{x \to x_{\cdot}^+} \frac{f(x) - f(x_{\cdot})}{x - x_{\cdot}} = f'_+(x_{\cdot}) \Rightarrow f'_+(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^+} \frac{|x| - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = ۱$$

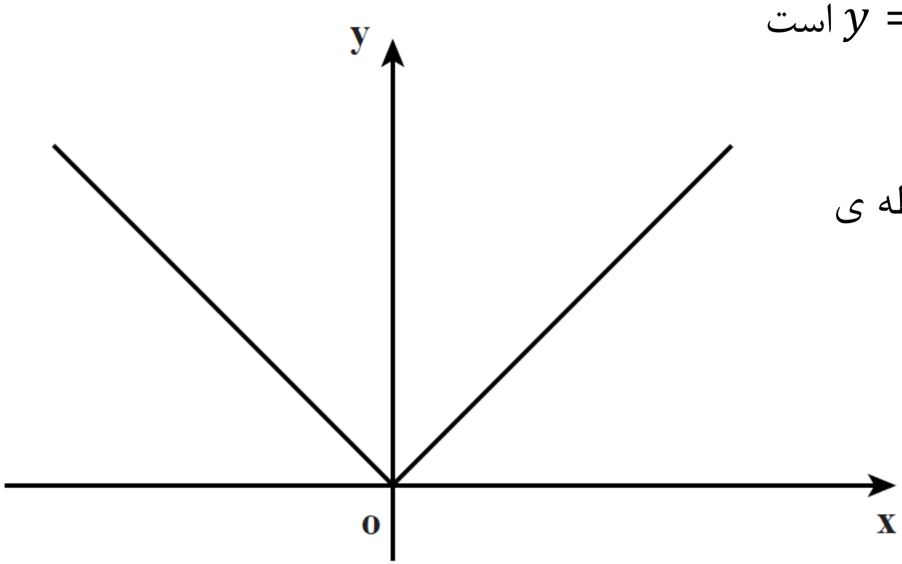
مشتق چپ:

$$\lim_{x \to x_{\cdot}^-} \frac{f(x) - f(x_{\cdot})}{x - x_{\cdot}} = f'_-(x_{\cdot}) \Rightarrow f'_-(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^-} \frac{|x| - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -۱$$

نمودار این تابع نیز نشان می دهد که در نقطه ی $x_{\cdot} = \cdot$ و در سمت چپ، نمودار تابع به صورت خط $y = -x$ است و مماس بر آن دارای شیب ۱− است.

اما در سمت راست نقطه ی مذکور، نمودار تابع به صورت خط $y = x$ است و مماس بر آن دارای شیب ۱+ است.

بنابراین و با توجه به مطالب گفته شده، نقطه ی $x_{\cdot} = \cdot$ یک نقطه ی زاویه دار برای منحنی $f(x) = |x|$ است.



نکته: در توابعی به شکل $y=|f(x)|$ اگر $x_{\circ}$ **ریشه ی ساده ی** داخل قدر مطلق باشد، تابع در این نقطه **مشتق پذیر نیست**.
اما اگر $x_{\circ}$ **ریشه ی تکراری** داخل قدر مطلق باشد، آن گاه تابع در این نقطه **مشتق پذیر است**.

مثال: تابع $y=\left|x(x-۲)^۳(x-۳)^۲\right|$ در چند نقطه نامشتق پذیر است؟

حل: ریشه های داخل قدر مطلق عبارتند از: $x=۳$ و $x=۲$ و $x=\circ$ که $x=\circ$ریشه ی ساده و $x=۳$ و $x=۲$ ریشه های تکراری داخل قدرمطلق می باشند. پس طبق نکته ی بالا، تابع فقط در یک نقطه $(x=\circ)$ نامشتق پذیر است.

نکته: اگر دو منحنی بر هم مماس باشند، در این صورت مشتق آن ها در نقطه ی تماس با هم برابر است.

مثال: اگر منحنی $y=x^۴+x$ و $y=mx^۳+n$ در $x=-۱$ بر هم مماس باشند، مقدار m را حساب کنید.

حل: طبق نکته ی قبل، ابتدا مشتق دو تابع در نقطه ی تماس را به دست می آوریم. سپس این دو مقدار را مساوی هم قرار داده تا مقدار مجهول به دست آید.

$$\begin{cases} y=x^۴+x \Rightarrow y'=۴x^۳+۱ \xRightarrow{x=-۱} y'=۴(-۱)^۳+۱=-۳ \\ y=mx^۳+n \Rightarrow y'=۳mx^۲ \xRightarrow{x=-۱} y'=۳m(-۱)^۲=۳m \end{cases} \Rightarrow -۳=-۳m \Rightarrow m=۱$$

نکته: علامت مشتق در یک نقطه، نشان دهنده ی آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش. به عبارت دیگر، علامت مشتق تابع، نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی بودن است.

اگر $f'(x_{\circ})\geq \circ$ در این صورت تابع f در یک بازه حول $x_{\circ}$ صعودی است و اگر $f'(x_{\circ})\leq \circ$ در این صورت تابع f در یک بازه حول $x_{\circ}$ نزولی است.

اندازه یا مقدار مشتق نیز نشان می دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است.

مثال: سیبی را در لحظه ی $t=۰$ از زمین رو به بالا پرتاب می کنیم. معادله ی حرکت آن به صورت $y(t)=-۵t^۲+۳۰t$ است. که y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می کشد و سرعت سیب در لحظه ی آخر چقدر است؟

حل: در لحظه ای که سیب پرتاب می شود و سپس مجددا به زمین برمی گردد داریم: $y(t)=۰$

$$y(t)=۰ \Rightarrow -۵t^۲+۳۰t=۰ \Rightarrow -۵t(t-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} -۵t=۰ \Rightarrow t=۰ \\ t-۶=۰ \Rightarrow t=۶ \end{cases}$$

در لحظه ی $t=۰$ سیب پرتاب و در لحظه ی $t=۶$ مجددا به زمین برگشته است. بنابراین این حرکت ۶ ثانیه طول کشیده است.

برای به دست آوردن معادله ی سرعت، از معادله ی حرکت مشتق می گیریم: $v(t)=y'(t)=-۱۰t+۳۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(۰)=-۱۰(۰)+۳۰=۳۰ \\ v(۶)=-۱۰(۶)+۳۰=-۳۰ \end{cases}$$

در لحظه ی $t=۰$ مقدار مشتق عددی مثبت است و این یعنی مقدار $y(t)$ در حال افزایش است.

اما در لحظه ی $t=۶$ مقدار مشتق عددی منفی است و این یعنی مقدار $y(t)$ در حال کاهش است.

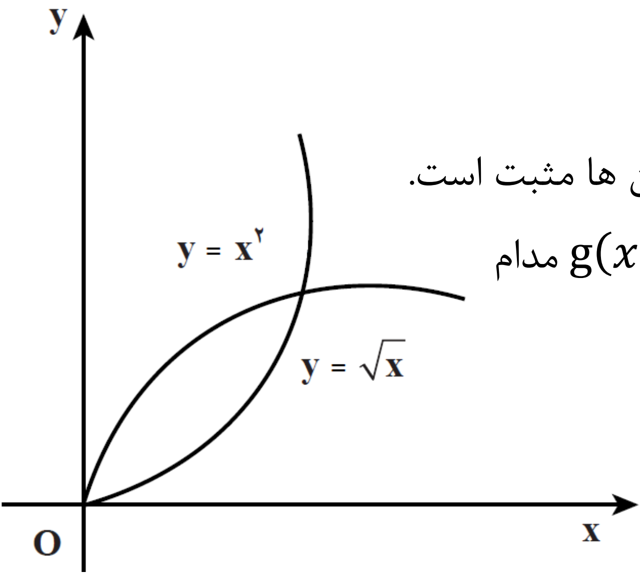
مثال: متحرکی روی یک خط افقی حرکت می کند که معادله ی حرکت $s=\frac{۱}{۳}t^۳-۳t^۲+۸t+۱۰$ آن است، در چه بازه زمانی متحرّک در جهت مثبت خطّ، حرکت می کند؟ در کدام بازه زمانی متحرّک در جهت منفی خطّ حرکت می کند؟ در کدام لحظه ها متحرّک تغییر جهت می دهد؟

حل: با مشتق گیری از معادله ی حرکت، معادله ی سرعت را به دست می آوریم. سپس معادله ی سرعت را تعیین علامت می کنیم.

$$v(t)=s'(t)=t^۲-۶t+۸\;;\; v(t)=۰ \Rightarrow t^۲-۶t+۸=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=۴ \end{cases}$$

t		۲		۴	
$t^{۲}-۶t+۸$	+	●	−	●	+

در بازه های زمانی $t < ۲$ و $t > ۴$ متحرک در جهت مثبت، در بازه ی زمانی $۲ < t < ۴$ در جهت منفی و در $t = ۲$ و $t = ۴$ متحرک تغییر جهت می دهد.



مثال: سرعت صعود توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^{۲}$ را با هم مقایسه کنید.

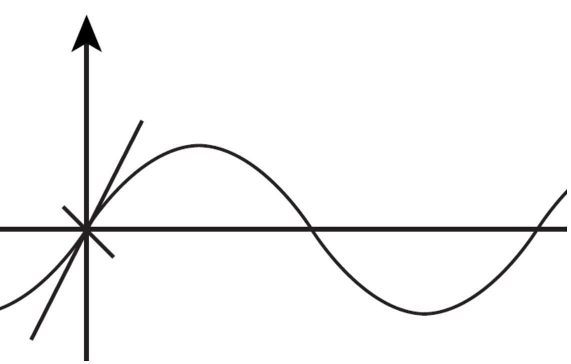
حل: با توجه به نمودار، این دو تابع روی بازه ی $(۰, +\infty)$ صعودی هستند و مشتق آن ها مثبت است.

اما سرعت صعود $f(x) = \sqrt{x}$ مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود $g(x) = x^{۲}$ مدام در حال افزایش است. این مطلب علاوه بر نمودار، در مشتق آن ها نیز دیده می شود.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \qquad\qquad g'(x) = ۲x$$

با افزایش x مقدار $f'(x)$ کاهش ولی مقدار $g'(x)$ افزایش می یابد.

مثال: سرعت صعود تابع $y = sinx$ در چه نقطه ای از همه بیش تر است؟



حل: باید ببینیم y' در چه نقطه ای بیشترین مقدار را دارد. داریم: $y' = cosx$

می دانیم تابع y' در $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ بیشترین مقدار خود را دارد.

لذا سرعت صعود در این نقاط، بیش تر از سایر نقاط است.

(به نمودار $y = sinx$ و خطوط مماس در $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ توجه کنید.)

فرمول های مشتق:

۱) $y = a \ (a \in \mathrm{R}) \Rightarrow y' = ۰$

۲) $y = a\,x^{n} \Rightarrow y' = nax^{n-۱}$

۳) $y = u^{n} \Rightarrow y' = nu'u^{n-۱}$

۴) $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$

۵) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^{۲}}$

۶) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

۷) $y = \sqrt[m]{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-۱}}}$

۸) $y = \sqrt[m]{u^{n}} \Rightarrow y' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مشتق توابع مثلثاتی:

۱) $y = sinu \ \Rightarrow y' = u'cosu$

۲) $y = cosu \ \Rightarrow y' = -u'sinu$

۳) $y = tanu \ \Rightarrow y' = u'(۱ + tan^{۲}u)$

۴) $y = cotgu \ \Rightarrow y' = -u'(۱ + cotg^{۲}u)$

۵) $y = sin^{n}u \ \Rightarrow y' = nu'cosusin^{n-۱}u$

۶) $y = cos^{n}u \ \Rightarrow y' = -nu'sinucos^{n-۱}u$

۷) $y = tan^{n}u \ \Rightarrow y' = nu'(۱ + tan^{۲}u)tan^{n-۱}u$

۷) $y = cotg^{n}u \ \Rightarrow y' = -nu'(۱ + cotg^{۲}u)cotg^{n-۱}u$

مشتق تابع مرکب:

۱) $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$ ۲) $y = fo\mathrm{g}(u) = f(\mathrm{g}(u)) \Rightarrow y' = u'\mathrm{g}'(u)f'(\mathrm{g}(u))$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^{۲}+۱} \xrightarrow{x^{۲}+۱=u \Rightarrow y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}} f'(x) = \frac{(x^{۲}+۱)'}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}} = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}} = \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$

ب) $f(x) = sin^{۴}x \xrightarrow{y=sin^{n}u \Rightarrow y'=nu'cosusin^{n-۱}u} f'(x) = ۴cosxsin^{۳}x$

ج) $f(x) = sinx^{۴} \xrightarrow{y=sinu \Rightarrow y'=u'cosu} f'(x) = ۴x^{۳}cosx^{۴}$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی:

۱) $y = e^{x} \Rightarrow y' = e^{x}$ ۲) $y = e^{u} \Rightarrow y' = u'e^{u}$

۳) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{۱}{x}$ ۴) $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

۵) $y = \ln|u| \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = e^{x^{۲}} - e^{cosx} \Rightarrow y' = ۲xe^{x^{۲}} - (-sinx)e^{cosx} = ۲xe^{x^{۲}} + sinxe^{cosx}$

۲) $y = e^{۲x} + e^{-x} + ۲ \Rightarrow y' = ۲e^{۲x} - e^{-x}$

$$۳)\ y = xe^{x^{۲}-۱} \Rightarrow y' = ۱\left(e^{x^{۲}-۱}\right) + x(۲x)\left(e^{x^{۲}-۱}\right) = e^{x^{۲}-۱}(۱ + ۲x^{۲})$$

$$۴)\ y = \ln(۱ + cos^{۲}x) \quad \Rightarrow y' = \frac{-۲sinxcosx}{۱ + cos^{۲}x}$$

$$۵)\ y = sinx.e^{cosx} \Rightarrow y' = cosx(e^{cosx}) + sinx(-sinx)(e^{cosx}) = e^{cosx}(cosx - sin^{۲}x)$$

مسائل صفحه ی ۷۳:

۷- تابع $y = x^{۳} - x^{۲} - x$ را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

ب) این تابع در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

حل: الف) ابتدا مشتق تابع را حساب کرده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = x^{۳} - x^{۲} - x \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۲x - ۱ \xRightarrow{y'=۰} ۳x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = ۱ \\ x_{۲} = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۱	
$y' = ۳x^{۲} - ۲x - ۱$	$+$		$-$		$+$

با توجه به جدول، تابع در بازه های $(-\infty, -\frac{۱}{۳}]$ و $[۱, +\infty)$ صعودی و در بازه ی $[-\frac{۱}{۳}, ۱]$ نزولی می باشد.

ب) منظور به دست آوردن ریشه های این تابع می باشد.

$$y = x^{۳} - x^{۲} - x \Rightarrow x^{۳} - x^{۲} - x = ۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x^{۲} - x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = ۰ \\ x_{۲} = \dfrac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \\ x_{۳} = \dfrac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

۱۲- فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۵\,;\, x \le ۳ \\ ۳x + ۲\,;\, x > ۳ \end{cases}$ مطلوب است محاسبه ی $f'_{-}(۳)$ و $f'_{+}(۳)$. آیا این تابع در $x = ۳$ مشتق پذیر است؟

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ی $x = ۳$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۳^{-}} f(x) = \lim\limits_{x \to ۳^{-}} (۲x + ۵) = ۱۱ \\ \lim\limits_{x \to ۳^{+}} f(x) = \lim\limits_{x \to ۳^{+}} (۳x + ۲) = ۱۱ \\ f(۳) = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow$$

تابع f در نقطه ی $x = ۳$ پیوسته است.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ & ; x \le ۳ \\ ۳ & ; x > ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_{-}(۳) = ۲ \\ f'_{+}(۳) = ۳ \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست f در نقطه ی $x = ۳$ برابر نیستند، بنابراین تابع f در نقطه ی $x = ۳$ مشتق پذیر نیست.

۱۳- تابع $y = f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + ۱ & ; x \geq ۲ \\ x^۳ & ; x < ۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در $x = ۲$ مشتق پذیر باشد، اعداد ثابت a و b را به دست آورید.

حل: چون تابع f در نقطه ی $x = ۲$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز بوده است. یعنی:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) \ (*)$$

$$\left.\begin{cases} \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} x^۳ = ۸ \\ \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \left(ax^۲ + bx + ۱\right) = ۴a + ۲b + ۱ \\ f(۲) = ۴a + ۲b + ۱ \end{cases}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} ۴a + ۲b + ۱ = ۸ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۷ (\mathrm{I})$$

از طرفی چون تابع f در نقطه ی $x = ۲$ مشتق پذیر است، پس مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر است.

$$\Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b \ ; x \geq ۲ \\ ۳x^۲ \quad ; x < ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(۲) = ۴a + b \\ f'_-(۲) = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۴a + b = ۱۲ \ (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(I) \text{ و } (II)} \begin{cases} ۴a + ۲b = ۷ \\ ۴a + b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow b = -۵ \, , a = \frac{۱۷}{۴}$$

۱٤- فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} -۳x+۵ \; ; x\le ۲ \\ x^۲-۲x-۱ \; ; x>۲ \end{cases}$ مطلوب است محاسبه ی $f'_{-}(۲)$ و $f'_{+}(۲)$. آیا این تابع در $x=۲$ مشتق پذیر است؟

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ی $x=۲$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(-۳x+۵)=-۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\left(x^۲-۲x-۱\right)=-۱ \\ f(۲)=-۱ \end{cases} \Rightarrow$$

تابع f در نقطه ی $x=۲$ پیوسته است.

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -۳ & ; x\le ۲ \\ ۲x-۲ & ; x>۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_{-}(۲)=-۳ \\ f'_{+}(۲)=۲ \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست f در نقطه ی $x=۲$ برابر نیستند، بنابراین تابع f در نقطه ی $x=۲$ مشتق پذیر نیست.

مثال: ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می کند تا بایستد. معادله ی حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t) = \frac{-t^۲}{۲} + ۳۰t$ است. t زمان بر حسب ثانیه است که از نقطه ی شروع ترمز اندازه گیری شده است و $x(t)$ بر حسب متر است.

الف) ماشین پس از ترمز کردن چند ثانیه طول می کشد که بایستد؟ ب) ماشین پس از طی چند متر می ایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ی ترمز کردن چه قدر بوده است؟ د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می رسد؟

حل: لازم است معادله ی سرعت را به دست آوریم. معادله ی سرعت ماشین، پس از مشتق گیری از معادله ی مکان-زمان آن به دست می آید.

$$x(t) = \frac{-t^۲}{۲} + ۳۰t \quad \Rightarrow v(t) = x'(t) = \frac{-۲t}{۲} + ۳۰ \Rightarrow v(t) = -t + ۳۰$$

الف) زمانی که ماشین می ایستد، داریم: $v(t) = ۰$

$v(t) = ۰ \Rightarrow ۰ = -t + ۳۰ \Rightarrow t = ۳۰s \Rightarrow$ ماشین ۳۰ ثانیه پس از ترمز می ایستد

ب) در معادله ی مکان-زمان قرار می دهیم: $t = ۳۰$

$$x(t) = \frac{-t^۲}{۲} + ۳۰t \xRightarrow{t=۳۰} x(۳۰) = \frac{-(۳۰)^۲}{۲} + ۳۰(۳۰) = \frac{-۹۰۰}{۲} + ۹۰۰ = -۴۵۰ + ۹۰۰ = ۴۵۰\, m$$

ج) در معادله ی سرعت-زمان قرار می دهیم: $t = ۰$

$$t = ۰ \Rightarrow v(t) = -۰ + ۳۰ \Rightarrow v(t) = ۳۰\, {}^{m}/_{s}$$

د) در معادله ی سرعت-زمان قرار می دهیم: $v(t) = ۲$

$$v(t) = -t + ۳۰ \Rightarrow ۲ = -t + ۳۰ \Rightarrow t = ۲۸$$

مسائل صفحه ی ۷۹:

۲- تابع $y = xe^x$ را در نظر بگیرید که روی R تعریف شده است.این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

حل: الف) ابتدا مشتق تابع را حساب کرده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = (۱ + x)e^x$$

x		-۱	
(علامت این تابع همواره مثبت است و هیچ گاه صفر نیز نمی شود.) e^x	$+$		$+$
$۱ + x$	$-$	٠	$+$
$(۱ + x)e^x$	$-$		$+$

با توجه به جدول تعیین علامت، تابع در بازه ی $[-۱, -\infty)$ نزولی و در بازه ی $(-۱, +\infty]$ صعودی است.

۳) توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده اند و مشتق آن ها در این نقاط چیست؟

الف) $y = \ln(sinx)$

می دانیم دامنه ی تابع $y = \ln(f(x))$ برابر است با $\mathrm{D}_y = \{x|f(x) > ٠\}$. بنابراین داریم:

$$sinx > ٠ \xRightarrow{\text{با توجه به نمودار}} ۲k\pi < x < (۲k + ۱)\pi$$

$$y = \ln(sinx) \xRightarrow{y=\ln(u)\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}} y' = \frac{cosx}{sinx} = cotgx$$

تذکر: اگر تابع به صورت داده $y = \ln(|sinx|)$ می شد، آن گاه به خاطر وجود قدر مطلق، مشکل مثبت بودن جلوی ln حل می شد و فقط عبارت $|sinx|$ نباید صفر شود.

ب) $y = \ln(|cosx|)$

$$|cosx| > ٠ \Rightarrow \mathrm{D}_y = \mathrm{R} - \{x|cosx = ٠\} \xRightarrow{\text{حل معادله مثلثاتی}} \mathrm{D}_y = \mathrm{R} - \left\{x \middle| x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\}$$

$$y = \ln(|cosx|) \xRightarrow{y=\ln(|u|)\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}} y' = \frac{-sinx}{cosx} = -tgx$$

ج) $y = \ln(x^۲ - x)$

$$x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x		۰	۱
x	$-$	$+$	$+$
$x-۱$	$-$	$-$	$+$
$x(x-۱)$	$+$	$-$	$+$

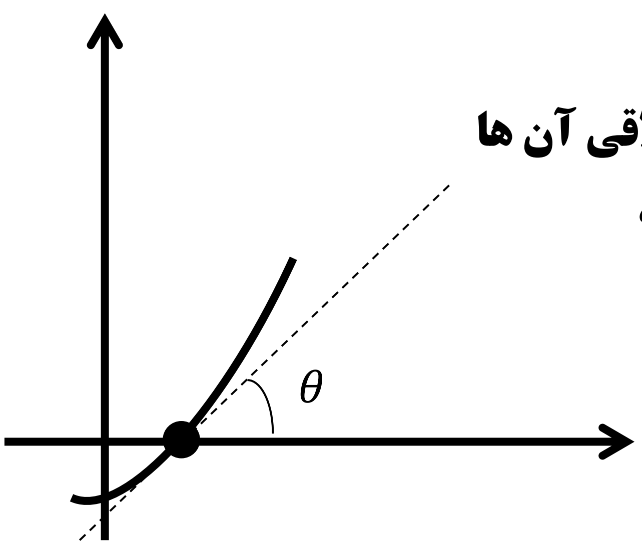
$$\Rightarrow D_y = (-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty)$$

$$y = \ln(x^۲ - x) \xRightarrow{y=\ln(u)\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}} y' = \frac{۲x - ۱}{x^۲ - x}$$

د) $y = \ln(|\ln x|)$

$$|\ln x| > ۰ \Rightarrow D_y = R - \{x|\ln x = ۰\} \xRightarrow{\text{حل معادله}} D_y = R - \{۱\}$$

$$y = ln(|\ln x|) \xRightarrow{y=ln(|u|)\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}} y' = \frac{\frac{۱}{x}}{\ln x} = \frac{۱}{x\ln x}$$



زاویه ی بین منحنی و محور x ها در محل تلاقی آن ها

هرگاه بخواهیم بدانیم که یک منحنی محور x ها را با چه زاویه ای قطع می کند، باید مطابق شکل، زاویه ی بین خط مماس بر منحنی در نقطه ی تقاطع با محور x ها و محور x ها را پیدا کنیم.

تذکر: منظور، زاویه ی تشکیل شده با جهت مثبت محور x ها می باشد.

می دانیم شیب یک خط، همان تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد($m = tan\theta$). پس با توجه به اینکه شیب خط مماس بر f در نقطه ی $(x_۰, f(x_۰))$ برابر $f'(x_۰)$ است، گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول: ابتدا محل تلاقی نمودار f با محور x ها به دست می آوریم. $(f(x) = ۰)$

گام دوم: فرض کنیم در نقطه ی $x_۰$ نمودار محور x ها قطع کند، در این صورت نقطه ی $x_۰$ را در مشتق تابع قرار داده و زاویه ی θ که $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$f'(x_۰) = tan\theta \Rightarrow \theta = ?$$

مثال: منحنی نمودار تابع $y = sinx$ با چه زاویه هایی محور x ها را قطع می کند؟

حل: گام اول: ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را به دست می آوریم:

$$y = ۰ \Rightarrow sinx = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$

گام دوم:

$$y' = f'(x) = cosx \Rightarrow f'(k\pi) = \cos(k\pi) = \begin{cases} ۱\,; if \text{ زوج } k \Rightarrow tan\theta = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴} \\ -۱\,; if \text{ فرد } k \Rightarrow tan\theta = -۱ \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

مثال: زاویه ی برخورد نمودار تابع $y = xe^x$ با محور x ها چه قدر است؟

حل: گام اول: ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را به دست می آوریم:

$$xe^x = ۰ \xRightarrow{e^x > ۰} x = ۰$$

$$y'(۰) = (۱ + ۰)e^۰ = ۱ \Rightarrow tan(\text{زاویه ی برخورد نمودار تابع با محور}x\text{ ها}) = ۱ \Rightarrow \text{زاویه ی برخورد نمودار تابع با محور}x\text{ ها} = ۴۵$$

تمرین: منحنی نمودار تابع $y = x^۳ - x^۲ - x$ با چه زاویه هایی محور x ها را قطع می کند؟

سوال: اگر تابع با ضابطه ی $y = \begin{cases} ax^{۲} - x + ۱ & ; x \leq ۱ \\ bx + \ln\sqrt{۲x - ۱} & ; x > ۱ \end{cases}$ در نقطه ی $x = ۱$ مشتق پذیر باشد، a و b را به دست آورید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع در نقطه ی $x = ۱$ را بررسی می کنیم.

$$\left.\begin{aligned} f(۱) &= \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ax^{۲} - x + ۱ = a(۱)^{۲} - (۱) + ۱ = a \\ \lim_{x\to ۱^+} f(x) &= \lim_{x\to ۱^+} bx + \ln\sqrt{۲x - ۱} = b(۱) + \ln ۱ = b + ۰ = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b\ (*)$$

حال مشتق پذیری تابع را در نقطه ی $x = ۱$ بررسی می کنیم.

$$y' = f'(x) = \begin{cases} ۲ax - ۱ & ; x \leq ۱ \\ b + \dfrac{\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x - ۱}}}{\sqrt{۲x - ۱}} & ; x > ۱ \end{cases} \Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} ۲ax - ۱ & ; x \leq ۱ \\ b + \dfrac{۱}{۲x - ۱} & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_-(۱) = ۲a(۱) - ۱ = ۲a - ۱ \\ f'_+(۱) = b + \dfrac{۱}{۲(۱) - ۱} = b + ۱ \end{cases} \Longrightarrow ۲a - ۱ = b + ۱ \Rightarrow ۲a - b = ۲ \xRightarrow{(*) a = b} ۲a - a = ۲$$

$$\Rightarrow a = ۲, b = ۲$$

تست: تابع f با ضابطه ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟ **کنکور سراسری ریاضی- سال ۸۲**

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; x<0\\ x+1 & ; 0\le x<1\\ 2x+2 & ; 1\le x<2\\ x^2+2 & ; x\ge 2\end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

حل: ابتدا پیوستگی تابع را بررسی می کنیم، آن هم در نقاط مرزی.

$\lim_{x\to 0^-} 1=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=f(0)=1 \Rightarrow$. تابع در $x=0$ پیوسته است.

$\lim_{x\to 1^-}(x+1)\neq \lim_{x\to 1^+}(2x+2)=f(1)=4 \Rightarrow$. تابع در $x=1$ پیوسته نیست.

$\lim_{x\to 2^-}(2x+2)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+2\right)=f(2)=6 \Rightarrow$. تابع در $x=2$ پیوسته است.

بنابراین تابع در یک نقطه ناپیوسته است. حال مشتق تابع را به دست آورده و مشتق پذیری تابع را در نقاط مرزی بررسی می کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}0 & ; x<0\\ 1 & ; 0\le x<1\\ 2 & ; 1\le x<2\\ 2x & ; x\ge 2\end{cases}\Rightarrow$$

$0=f'_-(0)\neq f'_+(0)=1 \Rightarrow$. تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$1=f'_-(1)\neq f'_+(1)=2 \Rightarrow$. تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

$2=f'_-(2)\neq f'_+(2)=4 \Rightarrow$. تابع در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

پس تابع در سه نقطه نیز مشتق ناپذیر است. بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۳ می باشد.

نکته: ۱) اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_{\circ}$ **پیوسته** و مشتق چپ و راست در این نقطه **موجود**، **متناهی** و **برابر** باشند، آن گاه می گوییم تابع $y = f(x)$ در $x = x_{\circ}$ مشتق پذیر است.

۲) اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_{\circ}$ **پیوسته نباشد** یا اینکه جواب های مشتق چپ و راست **نابرابر** یا **نامتناهی** باشند، آن گاه تابع $y = f(x)$ در $x = x_{\circ}$ مشتق پذیر نیست.

۳) پیوستگی تابع شرط لازم برای مشتق پذیری تابع است نه شرط کافی. به عبارت دیگر اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_{\circ}$ پیوسته باشد، ممکن است در آن نقطه مشتق پذیر نباشد.

۴) مشتق پذیری یک تابع خاصیتی قوی تر از پیوستگی است. یعنی تابعی که در یک نقطه مشتق پذیر است، حتما در آن نقطه پیوسته است.

تست: تابع با ضابطه ی $y = f(x) = \begin{cases} sinx & ; x > \frac{\pi}{۴} \\ -cosx & ; x \leq \frac{\pi}{۴} \end{cases}$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام وضع را دارد؟

۱) پیوسته است و مشتق پذیر نیست

۲) پیوسته نیست و مشتق پذیر نیست.

۳) پیوسته است و مشتق پذیر است.

۴) مشتق پذیر است ولی پیوسته نیست.

حل: ابتدا پیوستگی را بررسی می کنیم.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} -cosx = -cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = f(\frac{\pi}{۴}) \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} sinx = sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{۴})$$

بنابراین تابع پیوسته نیست در نتیجه مشتق پذیر نمی باشد. پس گزینه ی ۲ پاسخ صحیح می باشد.

معادله ی خط مماس:

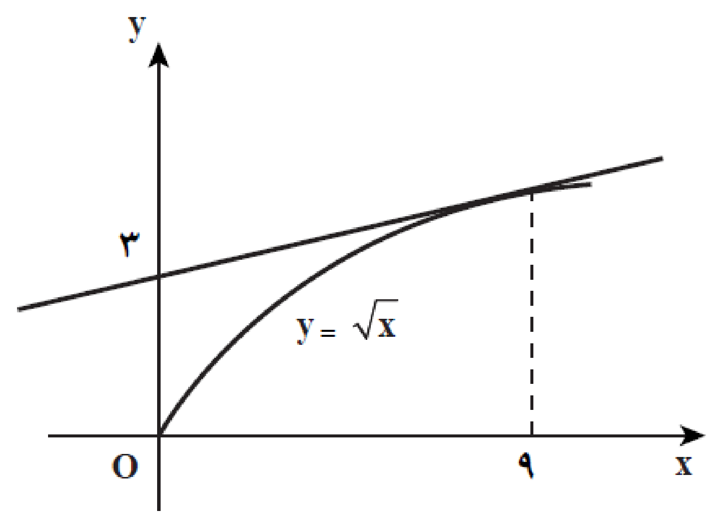
می دانیم $f'(x_{.})$ نشان دهنده ی شیب(ضریب زاویه)خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه ی $(x_{.},f(x_{.}))$ است.
بنابراین معادله ی خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه ی $(x_{.},f(x_{.}))$ عبارت است از:

$$y-f(x_{.})=f'(x_{.})(x-x_{.})$$

مثال: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه ی $(۹,۳)$ بنویسید.

حل: داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۹}f'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۱}{۶}$$ **شیب خط مماس**



پس معادله خط مماس عبارت است از:

$$y-(۳)=\left(\frac{۱}{۶}\right)(x-۹)\Rightarrow y-۳=\frac{۱}{۶}x-\frac{۹}{۶}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۶}x+\frac{۹}{۶}$$ **معادله ی خط مماس**

مثال: معادله ی خط مماس بر نمودار منحنی $y=f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}$ در نقطه ی $x_{.}=۱$ را به دست آورید.

$$x_{.}=۱\Rightarrow f(x_{.})=f(۱)=۱^{۳}-۲(۱^{۲})=۱-۲=-۱\Longrightarrow(۱,-۱)$$

حال شیب خط مماس در نقطه ی تماس را با قرار دادن مقدار $x_{\cdot} = ۱$ در تابع مشتق به دست می آوریم.

$$y' = f'(x) = ۳x^{۲} - ۴x \Rightarrow f'(۱) = ۳\left(۱^{۲}\right) - ۴(۱) = ۳ - ۴ = -۱$$

حال داریم:

$$y - (-۱) = (-۱)(x - ۱) \Rightarrow y + ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۱ - ۱ \Rightarrow y = x$$

تست: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = \ln(x + sinx + ۱)$ در $x = ۰$ کدام است؟

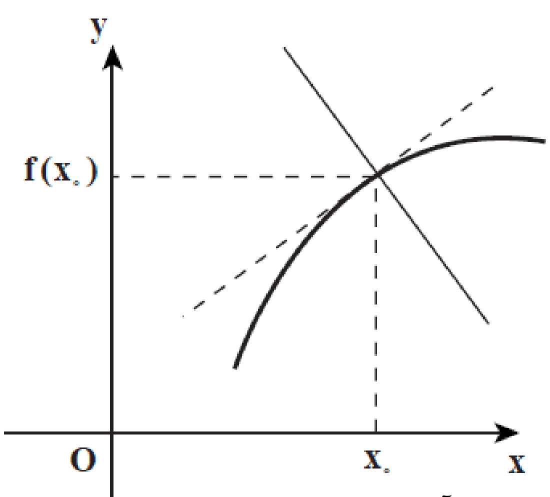
۱) $y = x$ ۲) $y = x + ۱$ ۳) $y = ۲x$ ۴) $y = ۲x + ۱$

معادله ی خط قائم:

اگر $f'(x_\circ)$ ضریب زاویه ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه ی $(x_\circ,f(x_\circ))$ باشد، در این صورت ضریب زاویه ی **خط عمود** بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه ی $(x_\circ,f(x_\circ))$ برابر $-\frac{۱}{f'(x_\circ)}$ است.

بنابراین معادله ی خط عمود بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه ی $(x_\circ,f(x_\circ))$ عبارت است از:

$$y-f(x_\circ)=-\frac{۱}{f'(x_\circ)}(x-x_\circ)$$



اگر خطی نمودار تابعی مانند f را به گونه ای قطع کند، که بر خط مماس بر نمودار f در آن نقطه عمود باشد، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.

مثال: معادله ی خط عمود بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه ی $\left(۲,\frac{۱}{۲}\right)$ بنویسید.

حل: در اینگونه مسائل ابتدا شیب خط مماس در نقطه خواسته شده را به دست می آوریم، سپس آن را قرینه و معکوس کرده تا شیب خط عمود به دست آید.

$$y=f(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow y'=f'(x)=-\frac{۱}{x^۲} \xRightarrow{x=۲} f'(۲)=-\frac{۱}{۲^۲}=-\frac{۱}{۴} \xRightarrow{\text{قرینه و معکوس}} \underbrace{-\frac{۱}{f'(۲)}=۴}_{\text{شیب خط عمود}}$$

$$\underbrace{y-\frac{۱}{۲}=۴(x-۲) \Rightarrow y=۴x-۸+\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۴x-\frac{۱۵}{۲}}_{\text{معادله ی خط عمود}}$$

مثال: معادله ی خط قائم (عمود) بر منحنی $y=\sqrt{۲x+۵}$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر این منحنی بنویسید.

حل:

$$x_{.}=۲\Rightarrow y=f(x_{.})=f(۲)=\sqrt{۲\times۲+۵}=\sqrt{۹}=۳\rightarrow \mathbf{A}=(۲,۳)$$

حال ابتدا شیب خط مماس و سپس شیب خط قائم را به دست می آوریم.

$$y'=f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۵}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲\times۲+۵}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۲}{۲\times۳}=\frac{۱}{۳}\xRightarrow{\text{قرینه و معکوس}}-\frac{۱}{f'(۲)}=-۳$$

شیب خط عمود

$$y-۳=-۳(x-۲)\Rightarrow y=-۳x+۶+۳\Rightarrow y=-۳x+۹$$ **معادله ی خط عمود**

تست: معادله ی خط قائم (عمود) بر نمودار تابع با ضابطه ی $y=۴x+e^{-۲x}$ در نقطه ی $x=۰$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $۲y-x=۲$ ۲) $۲y+x=۲$ ۳) $y+۲x=۱$ ۴) $y-x=۱$

$$x_{.}=۰\Rightarrow y=f(x_{.})=f(۰)=۴\times۰+e^{-۲\times۰}=۰+e^{۰}=۰+۱=۱\rightarrow \mathbf{A}=(۰,۱)$$

$$y'=f'(x)=۴-۲e^{-۲x}\Rightarrow f'(۰)=۴-۲e^{-۲\times۰}=۴-۲e^{۰}=۴-۲\times۱=۴-۲=۲$$

$$\xRightarrow{\text{قرینه و معکوس}}-\frac{۱}{f'(۰)}=-\frac{۱}{۲}$$ **شیب خط عمود**

$$y-۱=-\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱\xRightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}}۲y=-x+۲\Rightarrow ۲y+x=۲$$

معادله ی خط عمود

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی شماره ی ۲ می باشد.

مثال: معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x) = x + \frac{۱}{x}$ را در نقطه ای به طول $x = ۱$ بنویسید. معادله ی خط عمود بر نمودار این تابع را در نقطه ای به طول $x = -۱$ بنویسید.

حل: ابتدا شیب خط مماس، یعنی مشتق تابع f در نقطه ی $x = ۱$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x + \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \xRightarrow{\text{شیب خط مماس}} m = f'(۱) = ۱ - \frac{۱}{(۱)^۲} = ۱ - ۱ = ۰$$

معادله ی خط مماس بر تابع در نقطه ی $x = ۱$:

$$y - (y_۰) = m(x - (x_۰)) \xRightarrow[x=۱ \Rightarrow y=۲]{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y - (۲) = ۰ \times (x - (۱)) \Rightarrow y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۲$$

برای به دست آوردن معادله ی خط عمود بر نمودار در نقطه ی $x = -۱$ نیز ابتدا شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه را به دست آورده، سپس با قرینه و معکوس کردن آن شیب خط عمود بر نمودار را به دست می آوریم.

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \xRightarrow{\text{شیب خط مماس}} m = f'(-۱) = ۱ - \frac{۱}{(-۱)^۲} = ۱ - ۱ = ۰ \xRightarrow{\text{شیب خط عمود}} m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{۰} = \text{تعریف نشده}$$

معادله ی خط عمود: زمانی که شیب خطی تعریف نشده باشد، معادله ی آن به صورت $x = x_۰$ می باشد. بنابراین داریم:

$$x = -۱$$

مشتق ضمنی: *Implicitly derived*

تابع با ضابطه ی $y = x^۳ + ۴x^۲$ را در نظر می گیریم. این معادله تابع f را به صورت صریح تعریف می کند اما در معادله ی $y^۳ + ۲x^۲y - x^۳ = ۱$ نمی توانیم y را به صورت صریح بر حسب x بیابیم. در این صورت می گوییم تابع $y = f(x)$ به طور ضمنی بر حسب x تعریف شده که ممکن است یک تابع نباشد بلکه یک رابطه باشد.

برای به دست آوردن مشتق ضمنی، تمام عبارات و اعداد را به سمت چپ انتقال داده، سپس به صورت زیر مشتق می گیریم:

$$f(x,y) = ۰ \Rightarrow y' = f'(x,y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\text{مشتق تابع را نسبت به } x \text{ می گیریم و } y \text{ را عددی ثابت می گیریم}}{\text{مشتق تابع را نسبت به } y \text{ می گیریم و } x \text{ را عددی ثابت می گیریم}}$$

مثال: مشتق (ضمنی) توابع زیر را به دست آورید.

الف) $x^۲ + xy + y^۲ = ۳ \quad \Rightarrow x^۲ + xy + y^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{۲x + y}{x + ۲y}$

روش دوم:

$$x^۲ + xy + y^۲ = ۳ \Rightarrow ۲x + \underbrace{۱ \times y + xy'}_{\text{(مشتق } xy \text{ طبق قانون حاصل ضرب دو تابع حساب می شود.)}} + \overbrace{۲yy'}^{\text{(مشتق } y^۲ \text{ طبق قانون مشتق تابع مرکب حساب می شود.)}} = ۰ \xRightarrow{\text{فاکتورگیری از } y'} ۲x + y + y'(x + ۲y) = ۰$$

$$\xRightarrow{\text{جملات غیرشامل } y' \text{ را به سمت دیگر تساوی می بریم}} y'(x + ۲y) = -(۲x + y) \Rightarrow y' = -\frac{۲x + y}{x + ۲y}$$

ب) $۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱ \quad \Rightarrow ۲x^۲ + ۳y^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{۴x}{۶y} = -\frac{۲x}{۳y}$

روش دوم:

$$۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱ \Rightarrow ۴x + \underbrace{۶yy'}_{\text{(مشتق } ۳y^۲ \text{ طبق قانون مشتق تابع مرکب حساب می شود.)}} = ۰ \xRightarrow{\text{جملات غیرشامل } y' \text{ را به سمت دیگر تساوی می بریم}} ۶yy' = -۴x \Rightarrow y' = \frac{-۴x}{۶y} = -\frac{۲x}{۳y}$$

مسائل صفحه ی ۸۲:

۱) در تمرین های زیر با استفاده از مشتق گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

الف) $xsiny + ycosx = ۱ \quad \Rightarrow f(x,y) = xsiny + ycosx - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow y' = -\dfrac{siny - ysinx}{xcosy + cosx}$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$xsiny + ycosx = ۱ \Rightarrow ۱ \times siny + x \times y'cosy + y'cosx - ysinx = ۰$$

$$\Rightarrow y'(xcosy + cosx) = ysinx - siny \Rightarrow y' = \frac{ysinx - siny}{xcosy + cosx}$$

ب) $y = cos(x-y) \Rightarrow f(x,y) = y - cos(x-y) = ۰ \Rightarrow y' = -\dfrac{sin(x-y)}{۱ + sin(x-y)}$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$y = cos(x-y) \xRightarrow{\left(cosf(x,y)\right)' = -f'(x,y)sinf(x,y)} \Rightarrow y' = (x-y)'(-sin(x-y))$$

$$\xRightarrow{(x-y)' = ۱ - y'} y' = (۱ - y')(-sin(x-y)) \Rightarrow y' = (y' - ۱)sin(x-y) \Rightarrow y' = y'sin(x-y) - sin(x-y)$$

$$sin(x-y) = y'\,sin(x-y) + y' \Rightarrow sin(x-y) = y' \times [sin(x-y) + ۱] \Rightarrow y' = \frac{sin(x-y)}{sin(x-y) + ۱}$$

ج) $x^۲y^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow f(x,y) = x^۲y^۲ - x^۲ - y^۲ = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{۲xy^۲ - ۲x}{۲yx^۲ - ۲y} = -\frac{۲x(y^۲ - ۱)}{۲y(x^۲ - ۱)} = -\frac{x(y^۲ - ۱)}{y(x^۲ - ۱)}$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$x^۲y^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۲xy^۲ + ۲y'yx^۲ = ۲x + ۲y'y \Rightarrow ۲xy^۲ - ۲x = ۲y'y - ۲y'yx^۲$$

$$\Rightarrow ۲xy^۲ - ۲x = y'(۲y - ۲yx^۲)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲xy^۲ - ۲x}{۲y - ۲yx^۲} \Rightarrow y' = \frac{۲x(y^۲ - ۱)}{۲y(۱ - x^۲)} \Rightarrow y' = \frac{x(y^۲ - ۱)}{y(۱ - x^۲)}$$

۲) معادله ی خط مماس بر منحنی به معادله ی $x^۴ + y^۴ + x^۲y^۲ - ۳ = ۰$ در نقطه ی $A(۱,۱)$ را به دست آورید.

حل: باید شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(۱,۱)$ را به دست آوریم. برای این کار نیاز به مشتق ضمنی منحنی داریم.

$$f(x,y) = x^۴ + y^۴ + x^۲y^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow y' = f'(x,y) = -\frac{۴x^۳ + ۲xy^۲}{۴y^۳ + ۲yx^۲}$$

نقطه ی $A(۱,۱)$ روی نمودار منحنی قرار دارد. زیرا مختصات آن در معادله ی منحنی صدق می کند:

$$x^۴ + y^۴ + x^۲y^۲ - ۳ = ۰ \xRightarrow{(x,y)=(۱,۱)} (۱)^۴ + (۱)^۴ + (۱)^۲(۱)^۲ - ۳ = ۱ + ۱ + ۱ - ۳ = ۳ - ۳ = ۰$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای نقطه ی $A(۱,۱)$. برای این منظور در فرمول مشتق قرار می دهیم: $x = ۱$ و $y = ۱$

$$f'(x,y) = -\frac{۴x^۳ + ۲xy^۲}{۴y^۳ + ۲yx^۲} \Rightarrow f'(۱,۱) = -\frac{۴(۱)^۳ + ۲(۱)(۱)^۲}{۴(۱)^۳ + ۲(۱)(۱)^۲} = -\frac{۴ + ۲}{۴ + ۲} = -\frac{۶}{۶} = -۱$$

بنابراین معادله ی خط مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$y - (y_۰) = m(x - (x_۰)) \Rightarrow y - ۱ = (-۱)(x - ۱) \Rightarrow y = -x + ۲$$

۳) معادله ی خط مماس بر منحنی به معادله ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۴$ در نقطه ی $A(۴,۴)$ را به دست آورید.

حل: باید شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(۴,۴)$ را به دست آوریم. برای این کار نیاز به مشتق ضمنی منحنی داریم.

$$f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-۴=۰ \Rightarrow y'=f'(x,y)=-\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{y}}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نقطه ی $A(۴,۴)$ روی نمودار منحنی قرار دارد. زیرا مختصات آن در معادله ی منحنی صدق می کند:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=۴ \xRightarrow{(x,y)=(۴,۴)} \sqrt{۴}+\sqrt{۴}=۲+۲=۴$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای نقطه ی $A(۴,۴)$. برای این منظور در فرمول مشتق قرار می دهیم: $x=۴$ و $y=۴$

$$f'(x,y)=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴,۴)=-\frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۴}}=-\frac{۲}{۲}=-۱$$

بنابراین معادله ی خط مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$y-(y_۰)=m\big(x-(x_۰)\big) \Rightarrow y-۴=(-۱)(x-۴) \Rightarrow y=-x+۸$$

۴) در چه نقطه ای از منحنی به معادله ی $x^۲+xy+y^۲-۳=۰$ خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است؟

حل: می دانیم اگر در نقطه ای خط مماس بر نمودار تابع افقی باشد، مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است. پس ابتدا مشتق را به صورت ضمنی محاسبه کرده و سپس مقدار آن را برابر صفر قرار می دهیم.

$$x^۲+xy+y^۲-۳=۰ \Rightarrow y'=f'(x,y)=-\frac{۲x+y}{x+۲y} \xRightarrow{y'=۰} -\frac{۲x+y}{x+۲y}=۰ \Rightarrow ۲x+y=۰ \Rightarrow y=-۲x$$

بنابراین در تمام نقاطی از نمودار تابع که مختصات آن ها به صورت $(x,-۲x)$ باشد، خط مماس بر منحنی به صورت افقی یعنی موازی محور x ها است.

۵) اگر $-۱۶ = ۸y^۲ - ۲xy^۳$ آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در نقطه ی $A(۳,۲)$ را به دست آورید.

حل: آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در نقطه ی $A(۳,۲)$ ، در واقع همان مقدار مشتق تابع در نقطه ی $A(۳,۲)$ است.

حال چون این تابع به صورت ضمنی داده شده است، مشتق ضمنی آن را محاسبه می کنیم.

$$f(x,y) = ۸y^۲ - ۲xy^۳ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow y' = f'(x,y) = -\frac{-۲y^۳}{۱۶y - ۶xy^۲} \xRightarrow{(x,y)=(۳,۲)} f'(۲,۳) = -\frac{-۲(۲)^۳}{۱۶(۲) - ۶(۳)(۲)^۲}$$

$$= -\frac{-۲ \times ۸}{۳۲ - ۱۸ \times ۴} = \frac{۱۶}{۳۲ - ۷۲} = \frac{۱۶}{-۴۰} = -\frac{۲}{۵}$$

سوال: معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $x^۲ + xy - y^۲ + ۱ = ۰$ در نقطه ی $(۱,-۱)$ را به دست آورید.

حل:

$$y' = f'(x,y) = -\frac{۲x + y}{x - ۲y} \Rightarrow f'(۱,-۱) = -\frac{۲(۱) - ۱}{۱ - ۲(-۱)} = -\frac{۱}{۳}$$ **شیب خط مماس**

حال داریم:

$$y - (-۱) = \left(-\frac{۱}{۳}\right)(x - ۱) \Rightarrow y + ۱ = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} - ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین تساوی را در ۳ ضرب می کنیم}} ۳y = -x - ۲ \Rightarrow ۳y + x + ۲ = ۰$$ **معادله ی خط مماس**

نکته: در حالتی که $f'(x_{.}) = ۰$ در این صورت خط مماس بر نمودار در نقطه ی $x_{.}$ افقی (موازی محور x ها) است و معادله ی آن به صورت $y = f(x_{.})$ است. در این حالت معادله ی خط عمود نیز $x = x_{.}$ می باشد.

مثال: در چه نقاطی روی نمودار $x^۲ - xy + y^۲ = ۱$ مماس بر منحنی افقی است؟ در چه نقاطی مماس قائم است؟

حل: در نقاطی مماس بر منحنی افقی است که شیب صفر باشد.

$$y' = f'(x,y) = -\frac{۲x - y}{۲y - x}$$

$$f'(x,y) = ۰ \xrightarrow{\text{مقدار یک کسر وقتی برابر صفر است که صورت آن صفر باشد}} ۲x - y = ۰ \Rightarrow y = ۲x$$

حال برای پیدا کردن نقاط، در معادله ی منحنی به جای y قرار می دهیم $۲x$.

$$x^۲ - xy + y^۲ = ۱ \xrightarrow{y=۲x} x^۲ - x(۲x) + (۲x)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x^۲ + ۴x^۲ = ۱ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{y=۲x} y = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}} \qquad \mathbf{A} = \left(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)$$

وقتی مماس قائم است شیب آن تعریف نشده است. زمانی شیب تعریف نشده است که مخرج کسر صفر شود.

$$y' = f'(x,y) = -\frac{۲x - y}{۲y - x} \quad \xrightarrow{\text{مخرج}=۰} ۲y - x = ۰ \Rightarrow ۲y = x$$

حال برای پیدا کردن نقاط، در معادله ی منحنی به جای x قرار می دهیم $۲y$.

$$x^۲ - xy + y^۲ = ۱ \xrightarrow{x=۲y} (۲y)^۲ - (۲y)y + y^۲ = ۱ \Rightarrow ۴y^۲ - ۲y^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow ۳y^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow y^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{x=۲y} x = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}} \qquad \mathbf{B} = \left(\pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}, \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

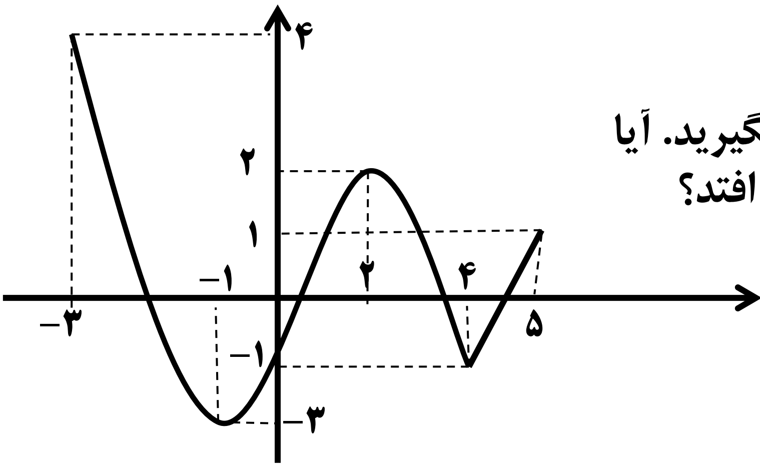
به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی/فصل چهارم:

کاربرد مشتق

The use of derivative

مفهوم اکسترمم های مطلق و نسبی تابع:



نمودار تابع f در بازه ی $[-۳,۵]$ را که به صورت زیر می باشد، در نظر بگیرید. آیا می توانید بگویید، بیشترین و کمترین مقدار تابع در چه نقاطی اتفاق می افتد؟

همان طور که از نمودار پیداست، بیشترین مقدار تابع در $x = -۳$ اتفاق افتاده که برابر ۴ است. هم چنین کم ترین مقدار تابع در $x = -۱$ اتفاق افتاده که برابر (-۳) است.

به بیشترین مقدار تابع در دامنه اش، **ماکزیمم مطلق** و به کم ترین مقدار تابع در دامنه اش، **می نیمم مطلق** تابع می گوییم. در این جا نقطه ی $(-۳,۴)$ نقطه ی ماکزیمم مطلق تابع بوده و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۴ است.

نیز نقطه ی $(-۱, -۳)$ نقطه ی می نیمم مطلق تابع بوده و مقدار می نیمم مطلق تابع برابر ۳- است.

تعریف: نقطه ی $a \in \mathbf{D}_f$ را نقطه ی ماکزیمم مطلق تابع f می نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbf{D}_f$ داشته باشیم:

$f(x) \leq f(a)$ یا $f(a) \geq f(x)$

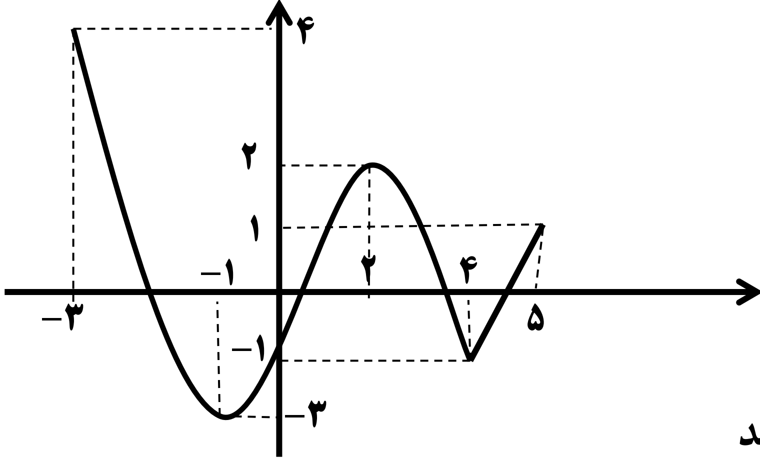
در این صورت $f(a)$ را ماکزیمم مطلق f می نامیم.

به طور مشابه، نقطه ی $a \in \mathbf{D}_f$ را نقطه ی می نیمم مطلق تابع f می نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbf{D}_f$ داشته باشیم:

$f(x) \geq f(a)$ یا $f(a) \leq f(x)$

در این صورت $f(a)$ را می نیمم مطلق f می نامیم.

در حالت کلی نقطه ی $x = a$ را یک نقطه ی اکسترمم مطلق f می نامیم هرگاه نقطه ی ماکزیمم مطلق یا نقطه ی مینیمم مطلق f باشد.



مجددا به نمودار f برمی گردیم. همان طور که در شکل می بینید، نمودار تابع در اطراف $x = ۲$ ، به شکل قله است و اگر یک بازه حول $x = ۲$ در نظر بگیریم،در این بازه بیش ترین مقدار تابع در $x = ۲$ اتفاق می افتد.
به چنین نقطه ای **ماکزیمم نسبی** تابع می گوییم. یعنی ماکزیمم فقط در اطراف آن نقطه اتفاق می افتد و نه لزوما در کل دامنه ی تابع.

هم چنین نمودار تابع در اطراف $x = -۱$ و $x = ۴$ به شکل دره می باشد و اگر یک بازه حول این نقاط را در نظر بگیریم، کم ترین مقدار تابع در آن بازه ها، در نقاط $x = -۱$ و $x = ۴$ اتفاق می افتد. به چنین نقاطی **می نیمم نسبی** تابع می گوییم، که در آن ها کافی است می نیمم در یک بازه اطراف نقطه رخ دهد، نه لزوما در کل دامنه ی تابع.

تعریف: فرض کنید بازه ی (a, b) زیر مجموعه ای از دامنه ی تابع f باشد. در این صورت:

الف) $c \in (a, b)$ را نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع f گوییم هرگاه برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$.
در این صورت $f(c)$ را ماکزیمم نسبی تابع f می نامند.

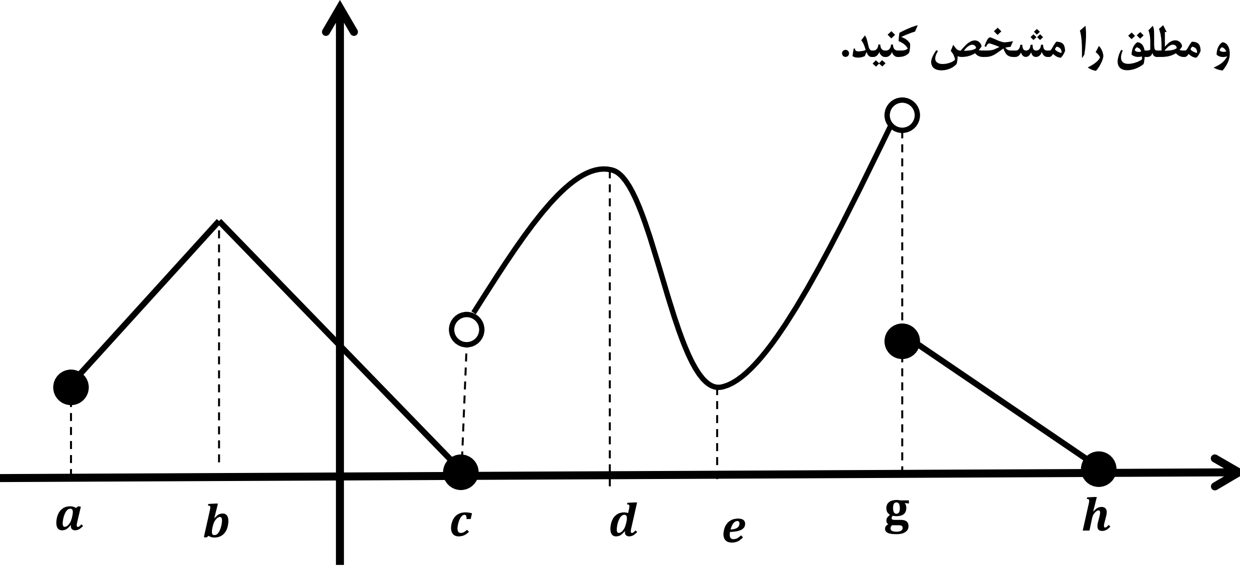
ب) $c \in (a, b)$ را نقطه ی می نیمم نسبی تابع f گوییم هرگاه برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$.
در این صورت $f(c)$ را می نیمم نسبی تابع f می نامند.

در این جا می توانیم دو نتیجه ی ظریف بگیریم:

۱) اگر دامنه ی تابع f بازه ی $[a, b]$ باشد، در این صورت نقاط ابتدایی و انتهایی بازه یعنی a و b ، نمی توانند ماکزیمم یا می نیمم نسبی باشند. زیرا در اطراف آن ها نمی توانیم یک بازه داشته باشیم که f در آن تعریف شده باشد. اما با توجه به تعریف، نقاط ابتدا و انتهای بازه می توانند ماکزیمم یا می نیمم مطلق باشند.

۲) نقاط ماکزیمم مطلق یا می نیمم مطلق در صورتی که نقاط ابتدایی یا انتهایی بازه نباشند، نقاط ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی نیز می باشند

مثال: در نمودار زیر اکسترمم های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



حل: می دانیم نقاط ماکزیمم نسبی نقاطی هستند که در نمودار تابع، حول یک بازه در اطراف خود، بالاترین نقطه باشند.

پس نقاط به طول b و d ماکزیمم نسبی هستند. هم نقاط c و e می نیمم نسبی هستند.

با توجه به نمودار، اگرچه تابع در c ناپیوسته است اما نقطه ی c هم از سمت چپ و هم از سمت راست خود پایین ترین نقطه می باشد.

در نقطه ی g نیز اگرچه تابع ناپیوسته است اما نمودار تابع در سمت چپ نقطه ی g بالاتر و در سمت راستg، پایین تر از نقطه به طول g می باشد. پس این نقطه نه ماکزیمم و نه می نیمم نسبی است.

توجه کنید که نقاط a و hیعنی نقاط ابتدا و انتهای نمودار، اکسترمم نسبی نمی باشند. زیرا در این نقاط نمی توانیم هیچ بازه ای بیابیم که تابع در آن بازه تعریف شده باشد.(در سمت چپ a و سمت راست b نمودار وجود ندارد و تابع تعریف نشده است.)

می نیمم مطلق این تابع، نقاط به طول c و h می باشند. زیرا این نقاط پایین ترین نقاط نمودار هستند.
اما این نمودار ماکزیمم مطلق ندارد.

یافتن ماکزیمم و می نیمم مطلق یک تابع با استفاده از مشتق:

حال می خواهیم بدانیم ویژگی اکسترمم های نسبی و مطلق تابع از نظر مشتق، چیست؟
مجددا به نمودار تابع f که در ابتدای فصل آورده شد برمی گردیم.

گفتیم تابع در نقاط $x = -۱$ و $x = ۲$ و $x = ۴$ دارای اکسترمم نسبی است. اگر کمی دقت کنید خط مماس بر نمودار تابع در نقاط $x = -۱$ و $x = ۲$ به صورت افقی است. یعنی شیب آن صفر است.

از طرفی قبلا گفتیم که شیب خط مماس در یک نقطه از منحنی تابع، برابر است با مقدار مشتق به ازای طول نقطه ی مماس. بنابراین نتیجه می گیریم $f'(۲) = f'(-۱) = ۰$. اما در $x = ۴$ تابع مشتق پذیر نمی باشد، زیرا در این نقطه نمی توانیم یک خط مماس بر منحنی رسم کنیم و مشتق چپ و راست در این نقطه با هم برابر نیستند.

قضیه ی ۱: تابع f با دامنه ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم f در $c \in (a, b)$ مشتق پذیر و دارای اکسترمم نسبی باشد. در این صورت $f'(c) = ۰$.

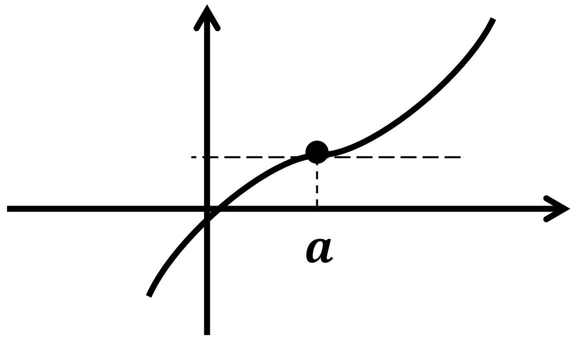
نتیجه: نقاط اکسترمم نسبی یا مطلق یک تابع نقاطی از دامنه ی تابع هستند که در آن نقاط، مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد.

تعریف: تابع f با دامنه ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید. نقاطی از بازه ی (a, b) که در آن نقاط، مشتق تابع صفر است یا مشتق وجود ندارد را، **نقاط بحرانی** تابع f می نامیم.

تذکر: طبق تعریف کتاب درسی نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، جزء نقاط بحرانی تابع محسوب نمی شوند.

نکته: هر نقطه ی اکسترمم نسبی، یک نقطه ی بحرانی است. اما هر نقطه ی بحرانی، ممکن است نقطه ی اکسترمم نسبی نباشد.

به عنوان مثال به شکل زیر دقت کنید. در این نمودار در نقطه ی a به دلیل این که خط مماس افقی است، مقدار مشتق تابع صفر است.
یعنی a نقطه ای بحرانی است. اما a نقطه ی ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی نمی باشد.



نکته: ریشه ی مخرج مشتق، نقطه ی بحرانی است به شرط آن که این نقطه در دامنه ی تابع قرار داشته باشد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x - ۲\sqrt{x}$ را به دست آورید.

حل: دامنه ی تابع بازه ی $[۰, +\infty)$ می باشد. ابتدا مشتق تابع را به دست می آوریم.

$$f'(x) = ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x}}$$

برای به دست آوردن نقاطی که مشتق در آن ها صفر است، مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x}} = ۰ \xrightarrow[\text{که صورتش صفر باشد.}]{\text{یک کسر زمانی صفر است}} \sqrt{x} - ۱ = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^۲ = ۱^۲ \Rightarrow x = ۱$$

برای به دست آوردن نقاطی که مشتق موجود نیست، مخرج مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^۲ = ۰^۲ \Rightarrow x = ۰ \in \mathbf{D}_f$$

قضیه ی ۲: اگر تابع f بر بازه ی بسته ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن گاه در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق است.

روش تعیین اکسترمم های مطلق یک تابع:

برای تعیین اکسترمم های مطلق یک تابع در بازه ای مانند $[a,b]$ ، ابتدا نقاط بحرانی و ریشه های مشتق را به دست آورده، سپس $f(a)$ و $f(b)$ و $f($نقاط بحرانی$)$ را حساب کرده، با هم مقایسه می کنیم.

کوچکترین جواب می نیمم مطلق و بزرگترین جواب ماکزیمم مطلق است.

مثال: نقاط بحرانی و ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $y = ۲x^{۳} - ۶x - ۱$ را در بازه ی $[-۲,۳]$ به دست آورید.

حل: چون تابع داده شده، تابع چند جمله ای می باشد، بنابراین در بازه ی $[-۲,۳]$ پیوسته است. بنابراین در این بازه دارای ماکزیمم و می نیمم مطلق است. برای یافتن ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق، ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم:

$$y = ۲x^{۳} - ۶x - ۱ \Rightarrow y' = ۶x^{۲} - ۶ \xRightarrow{y'=۰} ۶x^{۲} - ۶ = ۰ \Rightarrow ۶x^{۲} = ۶ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \xRightarrow{\text{طول نقاط بحرانی}} x = \pm۱$$

حال مقادیر تابع به ازای ابتدا و انتهای بازه و نیز به ازای طول نقاط بحرانی را می یابیم. کم ترین این مقادیر می نیمم مطلق و بیش ترین آن ها ماکزیمم مطلق تابع است.

$$f(-۲) = ۲(-۲)^{۳} - ۶(-۲) - ۱ = -۱۶ + ۱۲ - ۱ = -۵ \xleftarrow{\text{می نیمم مطلق}}$$

$$f(۳) = ۲(۳)^{۳} - ۶(۳) - ۱ = ۵۴ - ۱۸ - ۱ = ۳۵ \xleftarrow{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

$$f(۱) = ۲(۱)^{۳} - ۶(۱) - ۱ = ۲ - ۶ - ۱ = -۵ \xleftarrow{\text{می نیمم مطلق}}$$

$$f(-۱) = ۲(-۱)^{۳} - ۶(-۱) - ۱ = -۲ + ۶ - ۱ = ۳$$

مثال: تابع $f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه ی $[-۸,۲۷]$ را در نظر بگیرید. ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق آن را به دست آورید.

حل: ابتدا از تابع مشتق می گیریم و سپس نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۸}{۳}\sqrt[۳]{x^{۵}}-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۸x\sqrt[۳]{x^{۲}}}{۳}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\sqrt[۳]{x}\right)\left(۸x\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۸x^{۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

ریشه ی صورت و مخرج نقاط بحرانی می باشند.

ریشه ی صورت: $۸x^{۲}-۲=۰ \Rightarrow ۸x^{۲}=۲ \Rightarrow x^{۲}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^{۸}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

ریشه ی مخرج: $۳\sqrt[۳]{x}=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x}=۰ \Rightarrow \left(\sqrt[۳]{x}\right)^{۳}=۰^{۳} \Rightarrow x=۰$

$$\begin{cases} f(-۸)=\sqrt[۳]{(-۸)^{۸}}-\sqrt[۳]{(-۸)^{۲}}=\sqrt[۳]{\left((-۲)^{۳}\right)^{۸}}-\sqrt[۳]{\left((-۲)^{۳}\right)^{۲}}=(-۲)^{۸}-(-۲)^{۲}=۲۵۶-۴=۲۵۲ \\ f(۲۷)=\sqrt[۳]{(۲۷)^{۸}}-\sqrt[۳]{(۲۷)^{۲}}=\sqrt[۳]{(۳^{۳})^{۸}}-\sqrt[۳]{(۳^{۳})^{۲}}=(۳)^{۸}-(۳)^{۲}=۶۵۶۱-۹=۶۵۵۲ \\ f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt[۳]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۸}}-\sqrt[۳]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\sqrt[۳]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}-\sqrt[۳]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\frac{۱}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}-\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} \\ f(۰)=۰,\ f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸}}-\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}-\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\frac{۱}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}-\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} \end{cases}$$

ماکزیمم مطلق

می نیمم مطلق

می نیمم مطلق

روش تعیین اکسترمم های نسبی یک تابع:

آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترمم نسبی:

برای یافتن اکسترمم های نسبی یک تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

گام اول: نقاط بحرانی تابع را با حل معادله ی $f'(x) = ۰$ و یا پیدا کردن نقاطی که در آن ها $f'(x)$ موجود نیست، به دست می آوریم.

گام دوم: f' را در تعیین علامت می کنیم. اگر در اطراف نقطه ی بحرانی به طول a، f' از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، آن گاه a می نیمم نسبی و اگر از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، آن گاه a ماکزیمم نسبی است.
در غیر این صورت، یعنی اگر f' در اطراف a تغییر علامت ندهد، آن گاه a اکسترمم نسبی نخواهد بود.

جدول تغییرات:

برای یافتن اکسترمم های نسبی و بازه هایی که در آن ها تابع صعودی یا نزولی است، هم چنین برای نشان دادن جهت تغییرات نمودار تابع، از این جدول استفاده می کنیم.

ردیف اول این جدول، مربوط به x ، ردیف دوم مربوط به علامت y' در محدوده های x یا همان تعیین علامت y' و ردیف سوم مربوط به تغییرات y است.

مثال: ماکزیمم و می نیمم نسبی تابع $y = \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۵}{۲}x^۲ + ۶x + ۱۰$ را به دست آورید. آیا این تابع ماکزیمم مطلق یا می نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

حل: ابتدا y' را یافته و برای تعیین علامت و یافتن اکسترمم های نسبی، ریشه های آن را به دست می آوریم:

$$y = \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۵}{۲}x^۲ + ۶x + ۱۰ \Rightarrow y' = x^۲ - ۵x + ۶$$

$$\xRightarrow{y'=۰} x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

هم چنین مقادیر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ را نیز به دست می آوریم. داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۵}{۲}x^{۲}+۶x+۱۰=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۳}x^{۳}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۵}{۲}x^{۲}+۶x+۱۰=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۳}x^{۳}=-\infty$$

حال جدول تغییرات را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
y'		$+$	●	$-$	●	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۴۴}{۳}$	$\searrow$	$\frac{۲۹}{۲}$	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

الف) با توجه به آزمون مشتق اول، تابع در $x=۲$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x=۳$ دارای می نیمم نسبی است.

ب) تابع در بازه های $(-\infty,۲)$ و $(۳,+\infty)$ صعودی $(y'>۰$ چون$)$ و در بازه ی $(۲,۳)$ نزولی $(y'<۰$ چون$)$ است.

ج) چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ بنابراین تابع دارای ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق نیست.

مثال: اکسترمم های نسبی و مطلق تابع $f(x)=\left(x^{۲}-۱\right)^{۳}$ را به دست آورید.

حل:

$$f(x)=\left(x^{۲}-۱\right)^{۳}\Rightarrow f'(x)=۳(۲x)\left(x^{۲}-۱\right)^{۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}\begin{cases}۲x=۰\Rightarrow x=۰\\ \left(x^{۲}-۱\right)^{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x=\pm ۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(x^{۲}-۱\right)^{۳}=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^{۲}-۱\right)^{۳}=+\infty$$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$۲x$		$-$		$-$	●	$+$		$+$	
$\left(x^{۲}-۱\right)^{۲}$		$+$	●	$+$		$+$	●	$+$	
$f'(x)$		$-$	●	$-$	●	$+$	●	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	۰	↘	۱	↗	۰	↗	$+\infty$

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

الف) با توجه به آزمون مشتق اول، تابع در $x=۰$ دارای می نیمم نسبی است.

ب) تابع در بازه ی $(-\infty,۰)$ نزولی (چون $y'<۰$) و در بازه ی $(۰,+\infty)$ صعودی (چون $y'>۰$) است.

ج) چون $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ و با توجه به جدول تغییرات تابع در $(۰,۱)$ دارای می نیمم مطلق است

مشتق مراتب بالاتر:

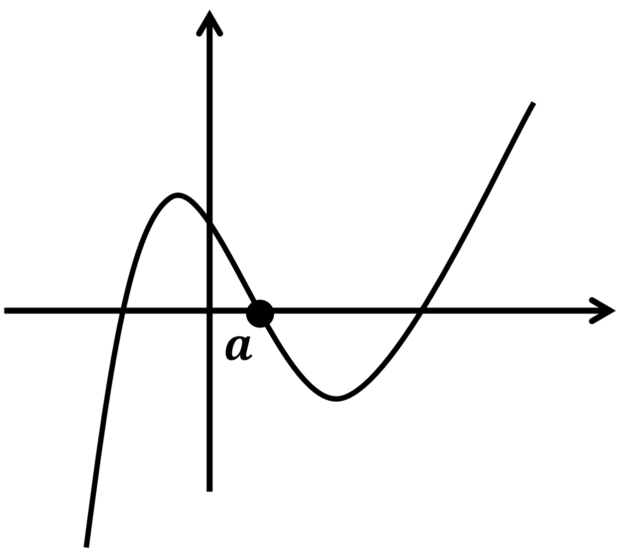
اگر تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه ی اول آن را با علامت $y' = f'(x)$ نشان می دهیم.
اگر $y' = f'(x)$ نیز مشتق پذیر باشد، در این صورت مشتق مرتبه ی دوم f را با $y'' = f''(x)$ نمایش می دهیم.
حال اگر از f'' نیز به شرط مشتق پذیر بودن دوباره مشتق بگیریم، مشتق مرتبه ی سوم حاصل خواهد شد که آن را با f''' یا $f^{(۳)}$ نمایش می دهیم.

اگر این روند را برای مراحل بعدی تکرار کنیم، مشتق مرتبه ی چهارم و پنجم و ... و مرتبه ی nام حاصل خواهد شد که به ترتیب با نمادهای $f^{(۴)}$ و $f^{(۵)}$ و ... و $f^{(n)}$ یا $y^{(۴)}$و $y^{(۵)}$و ... و $y^{(n)}$ نمایش داده می شوند و داریم:
$f^{(n)}(x) = \left(f^{n-۱}(x)\right)'$.

مثال: مشتق مرتبه ی سوم تابع $y = x^۴ - ۵x^۳ + ۷x$ را به دست آورید.

حل: $y' = ۴x^۳ - ۱۵x^۲ + ۷ \Rightarrow y'' = ۱۲x^۲ - ۳۰x \Rightarrow y''' = ۲۴x - ۳۰$

تقعر منحنی:

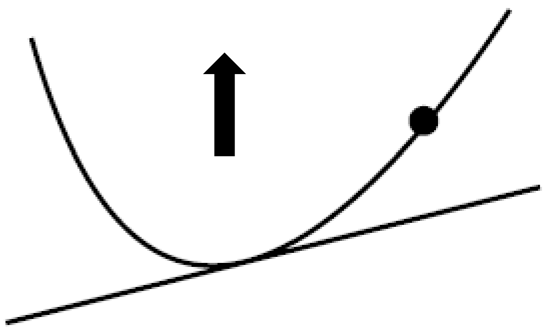


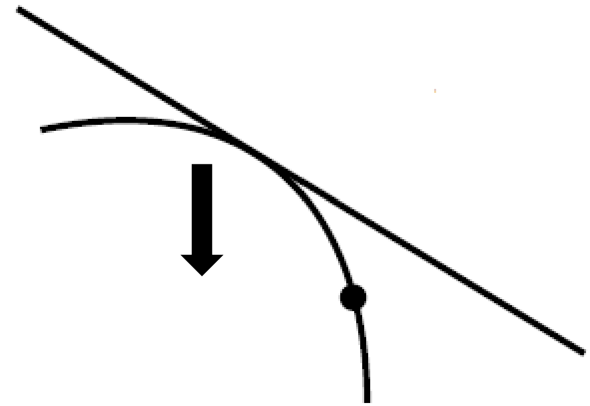
با دقت در نمودار تابع f در می یابیم که برای $x < a$ ، گودی یا دهانه ی نمودار به سمت پایین و برای $x > a$ دهانه ی نمودار به سمت بالا می باشد.
اصطلاحا می گوییم تقعر(گودی) منحنی در فاصله ی $(-\infty, a)$ ، رو به پایین و در فاصله ی $(a, +\infty)$ ، رو به بالا است.

حال اگر در نقاطی از نمودار تابع که تقعر نمودار رو به پایین است، مماسی بر منحنی رسم کنیم، وضعیت خط مماس نسبت به منحنی چگونه خواهد بود؟ در نقاطی که تقعر به سمت بالاست چه طور؟

نکته: اگر تقعر نمودار f در بازه ای مانند (a,b) رو به بالا باشد، آن گاه خطوط مماس بر منحنی در هر نقطه از این بازه زیر منحنی است. و برعکس.

هم چنین اگر تقعر نمودار f در بازه ای مانند (a,b) رو به پایین باشد، آن گاه خطوط مماس بر منحنی در هر نقطه از این بازه بالای منحنی است. و برعکس.





کاربرد مشتق در یافتن جهت تقعر منحنی:

همان طور که صعودی یا نزولی بودن تابع را از روی علامت مشتق اول مشخص می کنیم، جهت تقعر منحنی را نیز می توانیم با توجه به علامت مشتق دوم (y'') ؛ تعیین کنیم.

به این صورت که اگر تابع f که روی بازه ای حول a مشتق پذیر است، $f''(a) > ۰$ ، در این صورت تقعر منحنی در این نقطه به سمت بالا و اگر $f''(a) < ۰$ ، در این صورت تقعر منحنی در این نقطه به سمت پایین است.

بنابراین برای این که ببینیم تقعر منحنی یک تابع مشتق پذیر در چه فاصله هایی به سمت بالا و در چه فاصله هایی به سمت پایین است، $f''(x)$ را تعیین علامت می کنیم.

مثال: جهت تقعر نمودار تابع $y = x^۳$ را تعیین کنید.

حل: مشتق دوم را به دست آورده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = x^۳ \Rightarrow y' = ۳x^۲ \Rightarrow y'' = ۶x \xrightarrow{y''=۰} ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$	$\cdot$	$+\infty$
y''	$-$	$\bullet$	$+$
y	**تقعر رو به پایین**	$\cdot$	**تقعر رو به بالا**

پس تقعر منحنی $y = x^{3}$ در بازه ی $(-\infty, \cdot)$ رو به پایین و در بازه ی $(\cdot, +\infty)$ رو به بالا است.

نقطه ی عطف: نقطه ای است که در آن جهت تقعر منحنی عوض می شود.

برای به دست آوردن نقطه ی عطف یک تابع، مشتق دوم آن را تعیین علامت می کنیم. نقطه ای که علامت مشتق دوم در اطراف آن تغییر می کند، نقطه ی عطف می باشد.

مثال: نقطه ی عطف نمودار توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = x^{3} - 2x^{2} - 3x + 10$

$$\Rightarrow y' = 3x^{2} - 4x - 3 \Rightarrow y'' = 6x - 4 \xRightarrow{y''=0}$$

$$6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

x		$\frac{2}{3}$	
y''	$-$	$\bullet$	$+$
y	**تقعر رو به پایین**		**تقعر رو به بالا**

چون علامت مشتق دوم در اطراف $x = \frac{2}{3}$ تغییر می کند، پس نقطه ی $x = \frac{2}{3}$ طول عطف منحنی می باشد.

ب) $y = (x+1)^{4}$

$$\Rightarrow y' = 4(x+1)^{3} \Rightarrow y'' = 12(x+1)^{2}$$

$$\xRightarrow{y''=0} 12(x+1)^{2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

x		-1	
y''	$+$	$\bullet$	$+$
y	**تقعر رو به بالا**		**تقعر رو به بالا**

چون علامت مشتق دوم در اطراف $x = -1$ تغییر نمی کند، پس نقطه ی $x = -1$ طول عطف منحنی نمی باشد.

نکته: اگر مبدا مختصات را به نقطه ی $w(a,b)$ انتقال دهیم، برای به دست آوردن معادله ی جدید کافی است به جای x، $X+a$ و به جای y، $Y+b$ قرار دهیم.

مثال: معادله ی یک منحنی در دستگاه xoy به صورت $y=x^{۲}+۳x$ می باشد. اگر مبدا مختصات را به نقطه ی $w(-۱,۳)$ منتقل کنیم، معادله ی این منحنی در دستگاه جدید را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x = X - ۱ \\ y = Y + ۳ \end{cases} \Rightarrow Y + ۳ = (X-۱)^{۲} + ۳(X-۱) \Rightarrow Y + ۳ = X^{۲} - ۲X + ۱ + ۳X - ۳ \Rightarrow Y = X^{۲} + X - ۵$$

نکته: اگر در یک منحنی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم و معادله اولیه تغییر نکند، می گوییم مبدا مختصات، مرکز تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید منحنی $x^{۲}+۳y^{۲}=۵xy$ نسبت به مبدا مختصات متقارن است؟

حل:

$$\begin{cases} x \longrightarrow -x \\ y \longrightarrow -y \end{cases} \Rightarrow (-x)^{۲} + ۳(-y)^{۲} = ۵(-x)(-y) \Rightarrow x^{۲} + ۳y^{۲} = ۵xy$$

چون معادله ی منحنی تغییر نکرد بنابراین مبدا مختصات مرکز تقارن است.

نکته: اگر مبدا مختصات را به نقطه ی $w(a,b)$ انتقال دهیم و معادله ی جدید را بنویسیم و در معادله ی جدید $X \longrightarrow -X$ و $Y \longrightarrow -Y$ تبدیل کنیم و معادله ی جدید تغییر نکند، در این صورت گوییم منحنی نسبت به $w(a,b)$ تقارن دارد.

مثال: ثابت کنید نقطه ی عطف منحنی $y=x^{۳}-۴x^{۲}-۳x+۱۰$ مرکز تقارن آن است.

حل: ابتدا نقطه ی عطف منحنی را به دست می آوریم:

$$y = x^۳ - ۴x^۲ - ۳x + ۱۰ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۸x - ۳ \Rightarrow y'' = ۶x - ۸ \xRightarrow{y''=۰} ۶x - ۸ = ۰ \Rightarrow ۶x = ۸$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

x		$\frac{۴}{۳}$	
y''	$-$	●	$+$
y	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

چون مشتق دوم در $x = \frac{۴}{۳}$ تغییر علامت می دهد، بنابراین $\frac{۴}{۳}$ طول نقطه ی عطف منحنی می باشد.

$$x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow y = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۳ - ۴\left(\frac{۴}{۳}\right)^۲ - ۳\left(\frac{۴}{۳}\right) + ۱۰ = \frac{۶۴}{۲۷} - ۴ \times \frac{۴}{۳} - ۴ + ۱۰ = \frac{۶۴}{۲۷} - \frac{۱۶}{۳} + ۶ = \frac{۶۴ - ۱۴۴ + ۱۸}{۲۷}$$

$\Rightarrow y = \frac{۳۴}{۲۷} \Rightarrow$ **نقطه ی عطف:** $\left(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷}\right)$

حال مبدا مختصات را به $w\left(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷}\right)$ منتقل می کنیم.

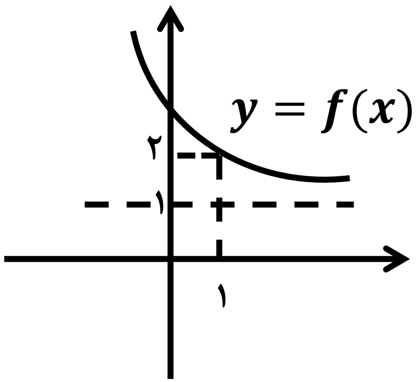
$$\begin{cases} x = \mathbf{X} + \frac{۴}{۳} \\ y = \mathbf{Y} + \frac{۳۴}{۲۷} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Y} + \frac{۳۴}{۲۷} = \left(\mathbf{X} + \frac{۴}{۳}\right)^۳ - ۴\left(\mathbf{X} + \frac{۴}{۳}\right)^۲ - ۳\left(\mathbf{X} + \frac{۴}{۳}\right) + ۱۰ \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{X}^۳ - \frac{۲۵}{۳}\mathbf{X}$$

$$\begin{cases} \mathbf{X} \longrightarrow -\mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \longrightarrow -\mathbf{Y} \end{cases} \Rightarrow -\mathbf{Y} = (-\mathbf{X})^۳ - \frac{۲۵}{۳}(-\mathbf{X}) \Rightarrow -Y = -\mathbf{X}^۳ + \frac{۲۵}{۳}\mathbf{X} \xRightarrow{\times(-۱)} \mathbf{Y} = \mathbf{X}^۳ - \frac{۲۵}{۳}\mathbf{X}$$

چون معادله تغییر نکرد، پس نقطه ی عطف مرکز تقارن است.

مجانب های نمودار توابع

۱) مجانب افقی:



نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. با توجه به نمودار ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

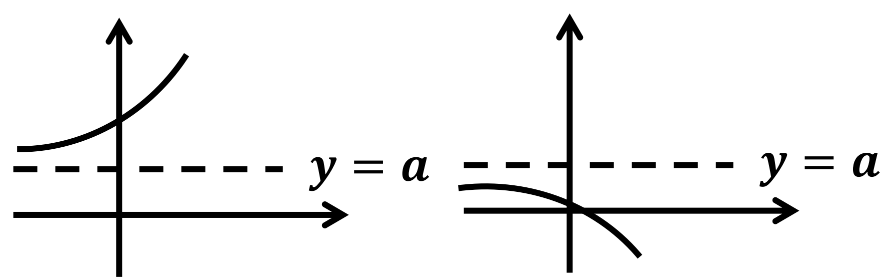
$$\lim_{x\to ۱} f(x)=?\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=?$$

همان طور که از نمودار تابع پیداست، وقتی x به سمت یک میل می کند، $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می شود.

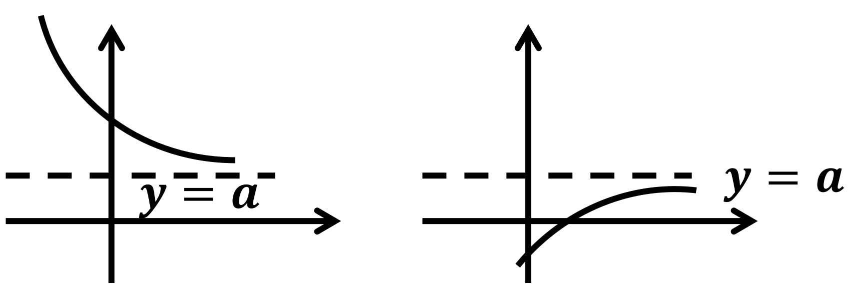
اما وقتی x به سمت $+\infty$ میل می کند، یعنی خیلی بزرگ می شود، نمودار تابع به خط $y=۱$ نزدیک می شود.
پس حد این تابع در $+\infty$ ، برابر ۱ است. خط $y=۱$ را که نمودار تابع در بی نهایت به آن نزدیک می شود، **مجانب افقی** تابع می گوییم.

- خط $y=a$ را مجانب افقی تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=a$$



$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=a$$



نکته: ممکن است دامنه ی تابع طوری باشد که x نتواند به سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل کند. در این صورت تابع در $+\infty$ (یا $-\infty$) مجانب افقی ندارد. به عنوان مثال اگر دامنه ی تابعی $[b, +\infty)$ باشد، در این صورت x نمی تواند به سمت $-\infty$ میل کند و تابع در $-\infty$ مجانب افقی ندارد. هم چنین اگر دامنه ی تابعی به صورت $[a, b]$ باشد در این صورت نمی تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند و تابع مجانب افقی ندارد.

روش به دست آوردن مجانب های افقی یک تابع:

برای به دست آوردن مجانب افقی یک تابع(در صورت وجود) کافی است از تابع $f(x)$ وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$ حد بگیریم.
اگر حاصل حد، عدد حقیقی a باشد، آن گاه خط $y = a$ مجانب افقی تابع می باشد.

مثال: مطلوبست به دست آوردن مجانب افقی تابع $y = \frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$.

حل:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱} = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^{۲}}{x^{۲}} = ۱$$

پس خط $y = ۱$ مجانب افقی نمودار این تابع در $+\infty$ و $-\infty$ می باشد.

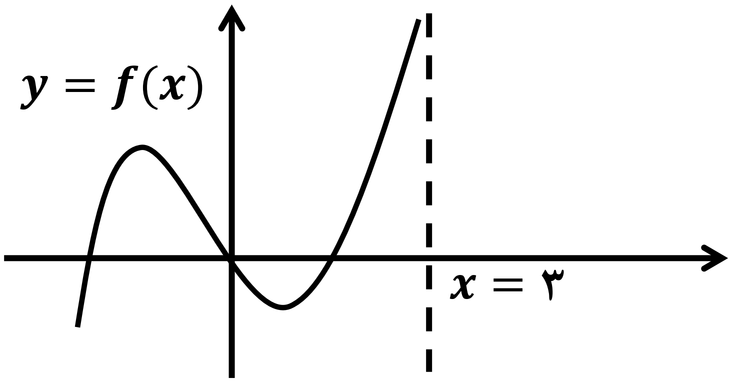
مثال: مطلوبست به دست آوردن مجانب افقی تابع $y = \frac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-۲x-۱}$.

حل:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-۲x-۱} = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^{۳}}{x^{۲}} = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

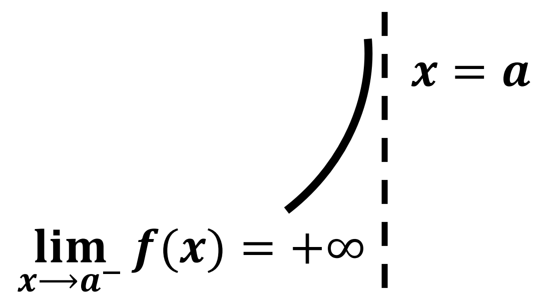
چون حاصل حد، عددی متناهی نشد، پس تابع مجانب افقی ندارد.

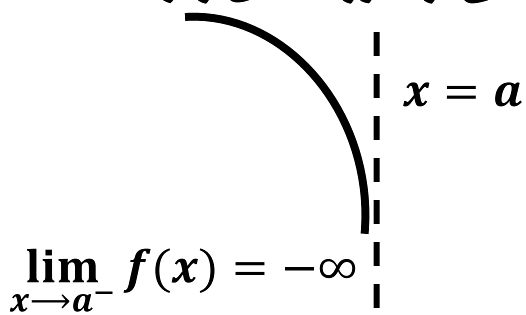
۲) مجانب قائم (عمودی):



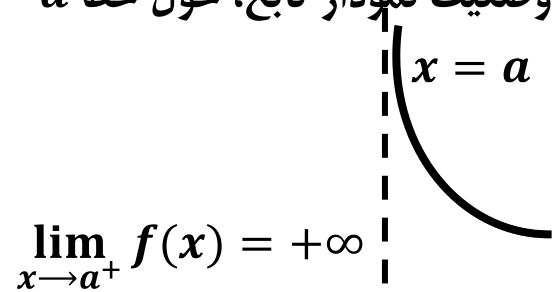
به نمودار تابع f دقت کنید. با توجه به نمودار، وقتی x از سمت چپ به عدد ۳ نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ بزرگ و بزرگ تر شده و در واقع $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل می کند. در این جا خط $x = ۳$ ، **مجانب قائم** منحنی نامیده می شود.

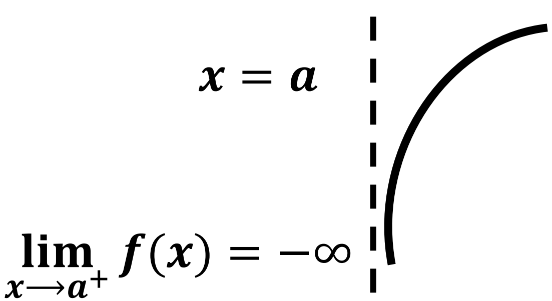
- در توابعی که حد چپ آن ها در نقطه ی $x = a$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ شود، نمودار تابع با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، در نزدیکی خط $x = a$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند. به این خط مجانب قائم منحنی تابع گفته می شود.
در این حالت وضعیت نمودار تابع، حول خط $x = a$ (مجانب قائم) به یکی از صورت های زیر است:





نیز در توابعی که حد راست آن ها در نقطه ی $x = a$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ شود، نمودار تابع با نزدیک شدن x به a از سمت راست،در نزدیکی خط $x = a$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند. به این خط نیز مجانب قائم منحنی تابع گفته می شود.
در این حالت وضعیت نمودار تابع، حول خط $x = a$ (مجانب قائم) به یکی از صورت های زیر است:





نکته: در توابع کسری، که صورت و مخرج آن ها توابعی پیوسته است، ریشه های مخرج کسر در صورتی که ریشه ی صورت نباشند، مجانب قائم نمودار تابع می باشند. زیرا حد تابع در این نقاط برابر $\pm\infty$ می شود.

مثال: همه ی مجانب های تابع $y = \dfrac{5x^2+3}{x^2-4x+3}$ را بیابید.

حل: برای یافتن مجانب افقی، حد تابع در بی نهایت را به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5$$

بنابراین خط $y = 5$ مجانب افقی نمودار این تابع می باشد.

برای یافتن مجانب های قائم، حد تابع در ریشه ی مخرج را به دست می آوریم:

$$x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to1^-}\frac{5x^2+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

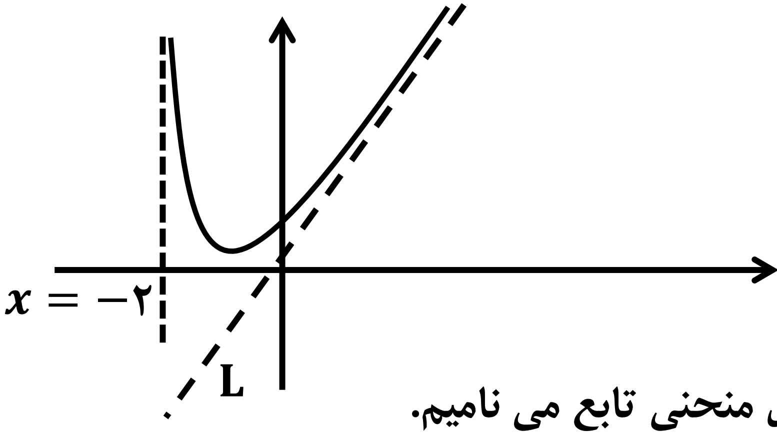
$$\lim_{x\to1^+}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to1^+}\frac{5x^2+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to3^-}\frac{5x^2+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{5x^2+3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to3^+}\frac{5x^2+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

بنابراین خطوط $x = 1$ و $x = 3$ مجانب های قائم نمودار این تابع می باشند.

۳) مجانب مایل نمودار تابع:



به نمودار تابع f دقت کنید. می دانیم خط $x=-۲$ مجانب قائم نمودار این تابع می باشد. هم چنین مشاهده می کنیم که تابع در بی نهایت به خط L نیز بسیار نزدیک می شود. همان طور که در شکل می بینید در مجاورت این خط، x به سمت $+\infty$ و $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل می کند.

معادله ی این خط به صورت $y=mx+b$ است و آن را مجانب مایل منحنی تابع می نامیم.

-- هرگاه حد تابع $f(x)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ ، بی نهایت شود، ممکن است بتوان خطی به صورت $y=mx+b$ یافت به گونه ای که نمودار تابع $f(x)$ و خط $y=mx+b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ به هم نزدیک شوند. خط $y=mx+b$ را **مجانب مایل** منحنی تابع گوییم و در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=۰ \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b))=۰$$

روش یافتن خطوط مجانب مایل نمودار یک تابع

هرگاه حاصل $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ بی نهایت شود، نمودار تابع مجانب افقی ندارد. اما امکان دارد، مجانب مایل داشته باشد.

در این صورت از روش های زیر می توانیم خط $y=mx+b$ را بیابیم:

۱) گاهی اوقات می توانیم ضابطه ی $f(x)$ را به صورت $(\mathrm{g}(x)+mx+b)$ بنویسیم، به طوری که $\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{g}(x)=۰$
در این صورت خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع می باشد.

به عنوان مثال در تابع $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

بنابراین امکان وجود مجانب مایل هست. با تقسیم چندجمله ای صورت بر مخرج داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + 2x & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x) & x + 1 \\ \cline{1-1} \quad x^2 + x & \\ \quad -(x^2 + 1) & \\ \cline{1-1} \quad x - 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1} = x - 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

حد تابع $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ برابر صفر است. پس خط $y = x - 1$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

-- در مواردی که ضابطه ی تابع به صورت تقسیم دو چندجمله ای بوده و درجه ی صورت، یک واحد بیش تر از درجه ی مخرج باشد، از روش بالا استفاده می کنیم.

۲) به طور کلی برای یافتن خط مجانب $y = mx + b$ ، باید دو ضریب m و b را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا شیب خط (m) را با محاسبه ی حد زیر به دست می آوریم:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

سپس b را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

مثال: مطلوبست مجانب مایل منحنی $f(x)=\frac{x^{3}-1}{x^{2}+x+2}$

حل:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^{3}-1}{x^{2}+x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{3}-1}{x(x^{2}+x+2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{3}-1}{x^{3}+x^{2}+2x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^{3}-1}{x^{2}+x+2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{3}-1-x^{3}-x^{2}-2x}{x^{2}+x+2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^{2}-2x-1}{x^{2}+x+2}=-1$$

بنابراین خط $y=x-1$ ، مجانب مایل منحنی تابع می باشد.

مثال: مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{1+x}$ را در صورت وجود بیابید.

حل: ابتدا حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را می یابیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{1+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{1+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^{4}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

چون حد فوق نامتناهی شد، بنابراین امکان وجود مجانب مایل هست.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{1+x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{x(1+x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{x^{2}+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^{4}}}{x^{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}-x(1+x)}{1+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^{4}}-x-x^{2}}{1+x}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2}-x-x^{2}}{1+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$$

بنابراین خط $y=-x-1$ ، مجانب مایل منحنی تابع در $+\infty$ و $-\infty$ می باشد.

رسم نمودار یک تابع:

برای رسم نمودار $y = f(x)$ مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱) دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

۲) با توجه به دامنه ی تابع، اگر حد تابع در $\pm\infty$ $(x \longrightarrow \pm\infty)$معنا داشته باشد، آن را محاسبه می کنیم. در این حالت ممکن است، نمودار تابع دارای مجانب افقی یا مایل باشد که آن ها را به دست می آوریم.
اگر دامنه ی تابع به صورت یک بازه مانند $[a, b]$ باشد، مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه به دست می آوریم.

۳) مجانب قائم نمودار تابع را در صورت وجود به دست می آوریم.

٤) نقاط برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات را به دست می آوریم.

٥) y' را به دست آورده و آن را در جدول تغییرات را تشکیل می دهیم، تا فاصله های صعودی و نزولی و نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی به دست آیند.

٦) y'' را در صورت امکان محاسبه می کنیم و با تعیین علامت آن، نقاط عطف را در صورت وجود به دست می آوریم.

۷) با استفاده از اطلاعات قسمت های قبل، جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.

۸) در صورت لزوم از نقاط کمکی استفاده می کنیم.
۹) با استفاده از جدول تغییرات و با مشخص کردن نقاط به دست آمده، نمودار تابع را رسم می کنیم.

تذکر۱: اگر با تبدیل x به $-x$ معادله ی منحنی تغییر نکند، محور y ها محور تقارن منحنی تابع خواهد بود.

تذکر۲: اگر با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله ی منحنی تغییر نکند،مبدا مختصات محور تقارن منحنی تابع خواهد بود.

مثال: نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۳$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. تابع دارای مجانب افقی، قائم و مایل نیست.

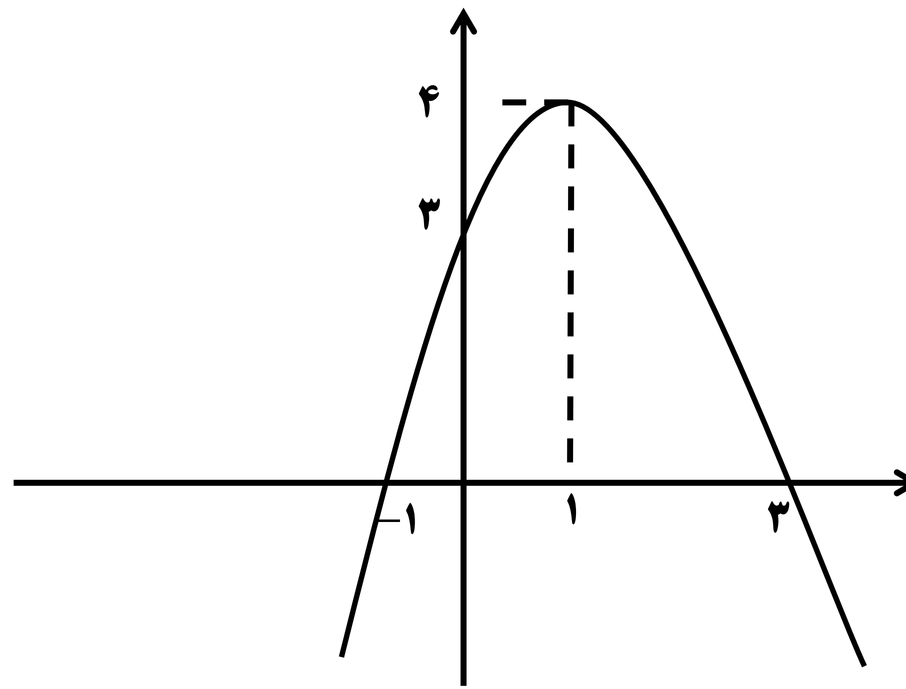
$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \\ y = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۱ \end{cases} \end{cases}$$

$$y' = -۲x + ۲ \xRightarrow{y' = ۰} -۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow -۲x = -۲ \Rightarrow x = ۱$$

$y'' = -۲ \Rightarrow$ تابع دارای نقطه ی عطف نیست

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۴	$\searrow$	$-\infty$
y''			تقعر رو به پایین		

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$



مثال: نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. تابع دارای مجانب افقی، قائم و مایل نیست.

$$y' = ۳x^۲ - ۳ \xRightarrow{y' = ۰} ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$$y'' = ۶x \xRightarrow{y'' = ۰} ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ y = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \\ x = -\sqrt{۳} \\ x = ۰ \end{cases} \end{cases}$$

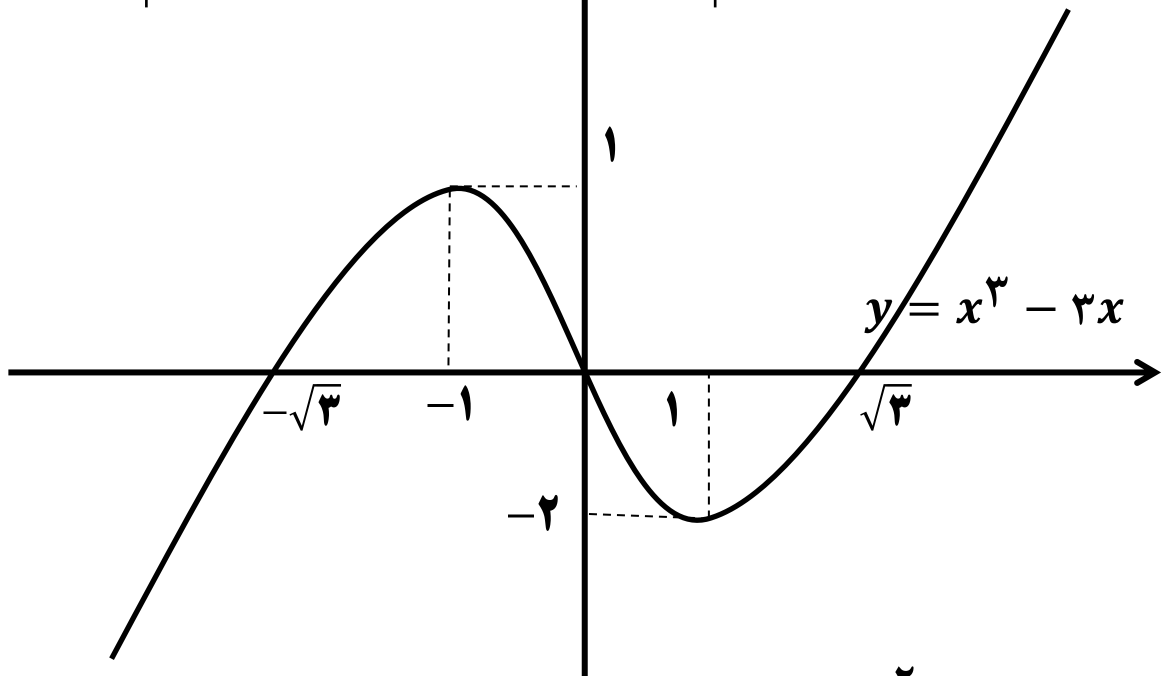
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		+		+	●	−		−	●	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	۰	↗	$+\infty$
y''					تقعر رو به پایین		●		تقعر رو به بالا				

ماکزیمم نسبی :$(-۱,۲)$

ماکزیمم نسبی :$(۱,-۲)$

نقطه ی عطف :$(۰,۰)$



مثال: نمودار تابع $y = \dfrac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. زیرا مخرج کسر ریشه ندارد($\Delta < ۰$). این تابع مجانب قائم نیز ندارد، چون مخرج کسر ریشه ندارد.

مجانب افقی:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۲+۱}=۱=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

بنابراین خط $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ است.

$$y'=\frac{۲x\left(x^۲+۱\right)-۲x\left(x^۲\right)}{\left(x^۲+۱\right)^۲}=\frac{۲x^۳+۲x-۲x^۳}{\left(x^۲+۱\right)^۲}=\frac{۲x}{\left(x^۲+۱\right)^۲}\xrightarrow{y'=۰}۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

$$y''=\frac{۲\left(x^۲+۱\right)^۲-۲\times ۲x\left(x^۲+۱\right)\quad\times ۲x}{\left(x^۲+۱\right)^۴}=\frac{۲\left(x^۲+۱\right)^۲-۸x^۲\left(x^۲+۱\right)}{\left(x^۲+۱\right)^۴}=\frac{\left(x^۲+۱\right)\left[۲\left(x^۲+۱\right)-۸x^۲\right]}{\left(x^۲+۱\right)^۴}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۲x^۲+۲-۸x^۲}{\left(x^۲+۱\right)^۳}=\frac{-۶x^۲+۲}{\left(x^۲+۱\right)^۳}\xrightarrow{y''=۰}-۶x^۲+۲=۰\Rightarrow x^۲=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

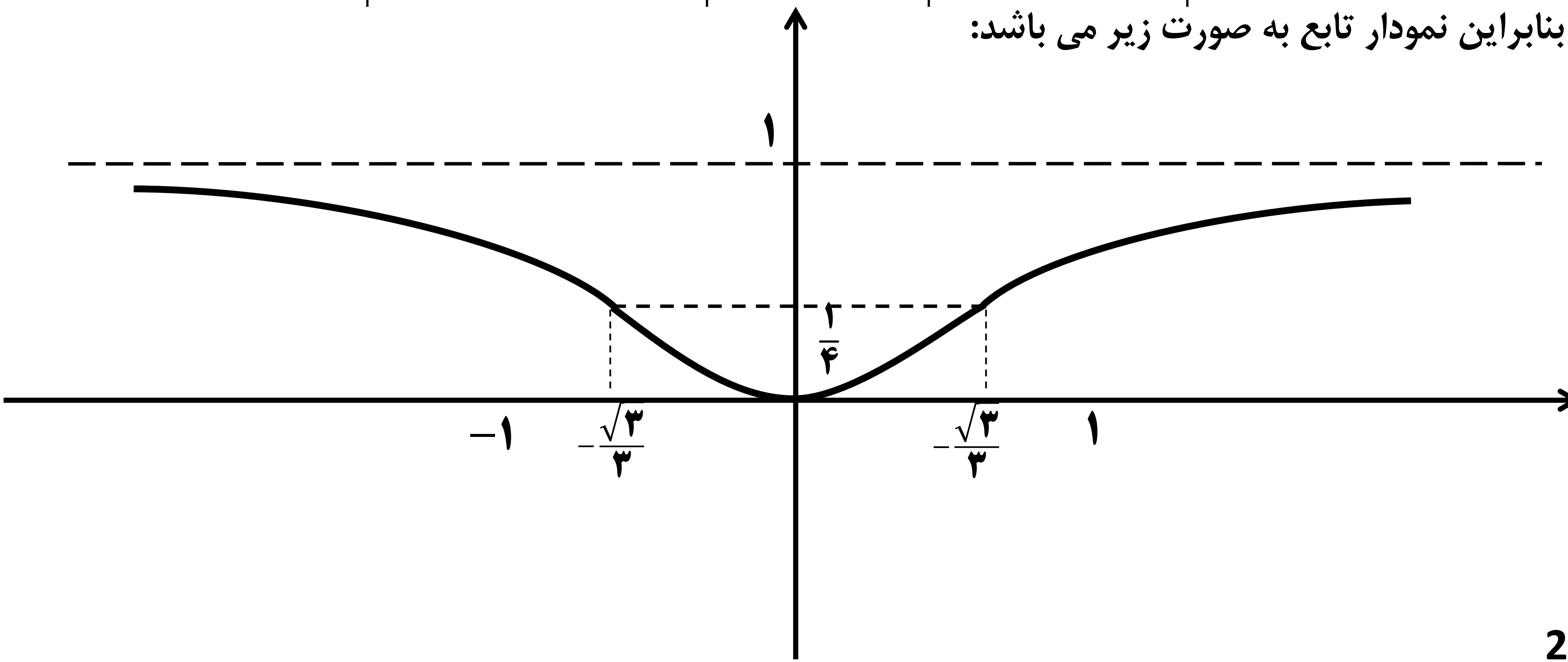
$$f(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۱}\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲}{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲+۱}=\dfrac{\frac{۳}{۹}}{\frac{۳}{۹}+۱}=\dfrac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}+۱}=\dfrac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۴}{۳}}=\dfrac{۱}{۴}=f\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)\\ f(۰)=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow y=۰\\ y=۰\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' و y'' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن ها کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		۰		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	●	$+$		$+$	
y	۱	↘	$\frac{۱}{۴}$	↘	۰	↗	$\frac{۱}{۴}$	↗	۱
y''		$-$	●	$+$		$+$	●	$-$	

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \Rightarrow \mathrm{D}_f=\mathrm{R}-\{\pm۱\}$$

خطوط $x=۱$ و $x=-۱$ (ریشه های مخرج) مجانب های قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to۱^-}\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-۱^+}\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to-۱^+}\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to-۱^-}\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to-۱^-}\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

مجانب افقی:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^{۲}-۱}=۰=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

بنابراین خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ است.

$$y'=\frac{۰\times\left(x^{۲}-۱\right)-۲x\times۱}{\left(x^{۲}-۱\right)^{۲}}=\frac{-۲x}{\left(x^{۲}-۱\right)^{۲}}\xrightarrow{y'=۰}-۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

$$y''=\frac{-۲\times\left(x^{۲}-۱\right)^{۲}-(-۲x)\times۲\times۲x\times\left(x^{۲}-۱\right)}{\left(x^{۲}-۱\right)^{۴}}=\frac{\left(x^{۲}-۱\right)\left[-۲\left(x^{۲}-۱\right)+۸x^{۲}\right]}{\left(x^{۲}-۱\right)^{۴}}=\frac{۶x^{۲}+۲}{\left(x^{۲}-۱\right)^{۳}}$$

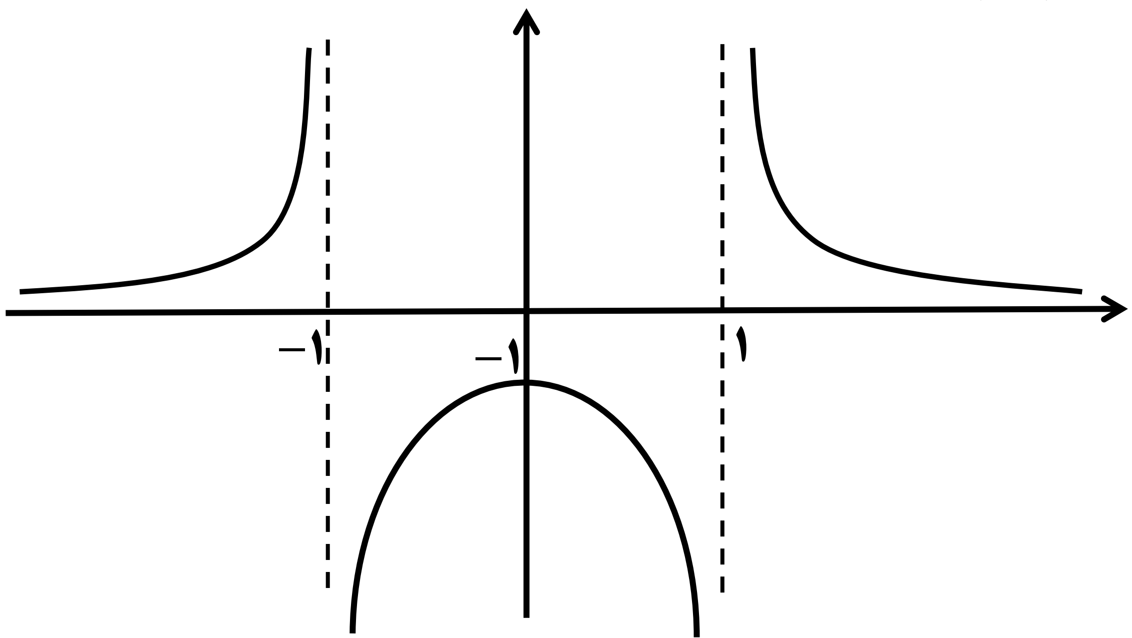
$\xrightarrow{y''=۰} ۶x^{۲}+۲=۰ \Rightarrow ۶x^{۲}=-۲ \Rightarrow x^{۲}=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع نقطه ی عطف ندارد

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \\ \\ y = ۰ \Rightarrow \text{ی وجود ندارد } x \Rightarrow \text{ نمودار با محور } x \text{ ها برخورد نمی کند} \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	۰	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-۱	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	۰

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $y=\frac{x^۲+۱}{x}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow D_f=R-\{۰\}$

خط $x=۰$ (ریشه ی مخرج) مجانب قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲+۱}{x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲+۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

مجانب افقی: این تابع دارای مجانب افقی نمی باشد. زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+۱}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+۱}{x}=\pm\infty$$

مجانب مایل:

$$y=\frac{x^۲+۱}{x}=x+\frac{۱}{x}\xrightarrow{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰}\text{مجانب مایل}: y=x$$

$$y'=\frac{۲x\times x-۱\times(x^۲+۱)}{x^۲}=\frac{x^۲-۱}{x^۲}\xrightarrow{y'=۰}x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

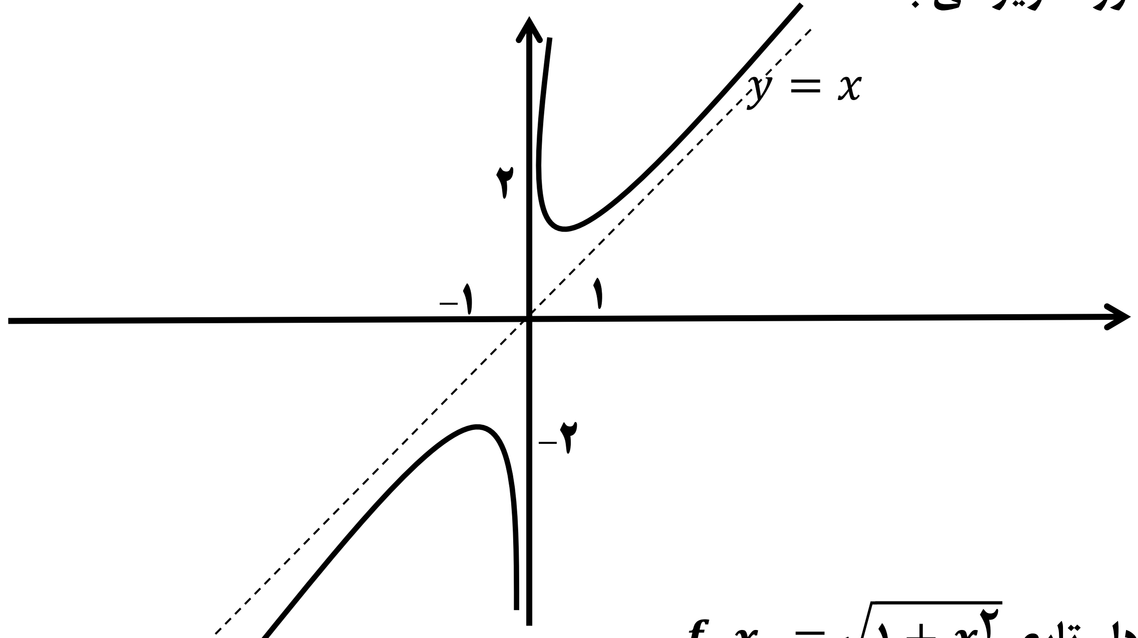
$$y''=\frac{(۲x)(x^۲)-(۲x)(x^۲-۱)}{x^۴}=\frac{۲x^۳-۲x^۳+۲x}{x^۴}=\frac{۲x}{x^۴}=\frac{۲}{x^۳}\xrightarrow{y''=۰}$$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع نقطه ی عطف ندارد

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow \text{ی وجود ندارد } y \Rightarrow \text{نمودار با محور } y \text{ ها برخورد نمی کند} \\ y=۰ \Rightarrow \text{ی وجود ندارد } y \Rightarrow \text{نمودار با محور } y \text{ ها برخورد نمی کند} \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	●	$-$	$\Vert$	$-$	●	$+$	
y	$-\infty$	↗	-۲	↘	$-\infty \Vert +\infty$	↘	۲	↘	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: مطلوبست رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{۱ + x^۲}$

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم. زیر رادیکال $\geq ۰ \Rightarrow ۱ + x^۲ \geq ۰ \Rightarrow D_f = R$

این تابع دارای مجانب قائم نیست. هم چنین به دلیل آن که $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$، دارای مجانب افقی نیز نمی باشد.

مجانب مایل:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=۱\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-۱\end{cases}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{۱+x^۲}-x\right)=\infty-\infty\xlongequal{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{۱+x^۲}-x\times\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱+x^۲-x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{x^۲}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{|x|+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{+\infty}=۰$$

بنابراین خط $y=x$ در $+\infty$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{۱+x^۲}+x\right)=-\infty+\infty\xlongequal{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{۱+x^۲}+x\times\frac{\sqrt{۱+x^۲}-x}{\sqrt{۱+x^۲}-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱+x^۲-x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{\sqrt{x^۲}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{|x|-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{-x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{-۲x}=\frac{۱}{+\infty}=۰$$

بنابراین خط $y=-x$ در $-\infty$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

$$y'=\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\xRightarrow{y'=۰}x=۰$$

$$y''=\frac{۱\times\left(\sqrt{۱+x^۲}\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\times x}{\left(\sqrt{۱+x^۲}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۱+x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲}=\frac{\frac{۱+x^۲-x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲}=\frac{۱}{(۱+x^۲)\left(\sqrt{۱+x^۲}\right)}$$

$\xRightarrow{y''=0}$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع نقطه ی عطف ندارد

با توجه به مثبت بودن y'' نتیجه می گیریم که تقعر منحنی همواره به سمت بالاست.

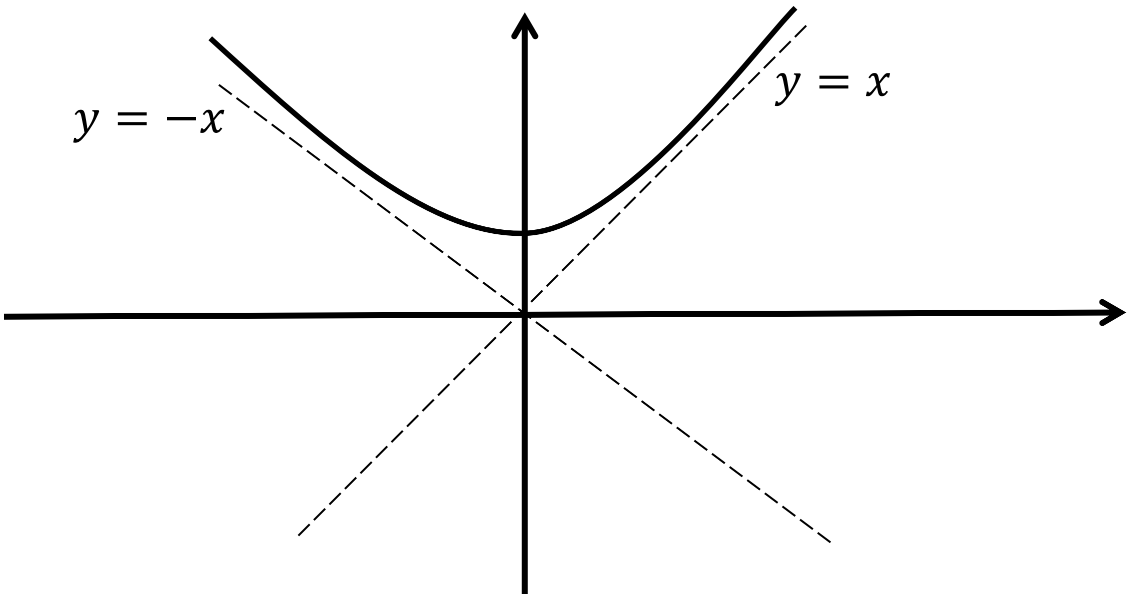
$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y = 0 \xRightarrow{\sqrt{1+x^2}=0 \Rightarrow 1+x^2=0 \Rightarrow x^2=-1} \end{cases}$$

x ی وجود ندارد $\Rightarrow$ نمودار با محور x ها برخورد نمی کند

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\bullet$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم.

زیر رادیکال $\geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2$ یا $x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \mathrm{D}_f = [-1,1]$

تابع مجانب قائم ندارد. زیرا به ازای هیچ مقداری حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ نمی شود. هم چنین مجانب افقی و مایل نیز ندارد. زیرا با توجه به محدود بودن دامنه ی تابع حد تابع در $\pm\infty$ معنی ندارد.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \xRightarrow{y'=0} -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقاط $x = 1$ و $x = -1$ (ریشه های مخرج) نیز نقاط بحرانی محسوب می شوند.

$$y'' = \frac{(-1)\left(\sqrt{1 - x^2}\right) - (-x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \frac{-1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$\xRightarrow{y''=0}$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع نقطه ی عطف ندارد

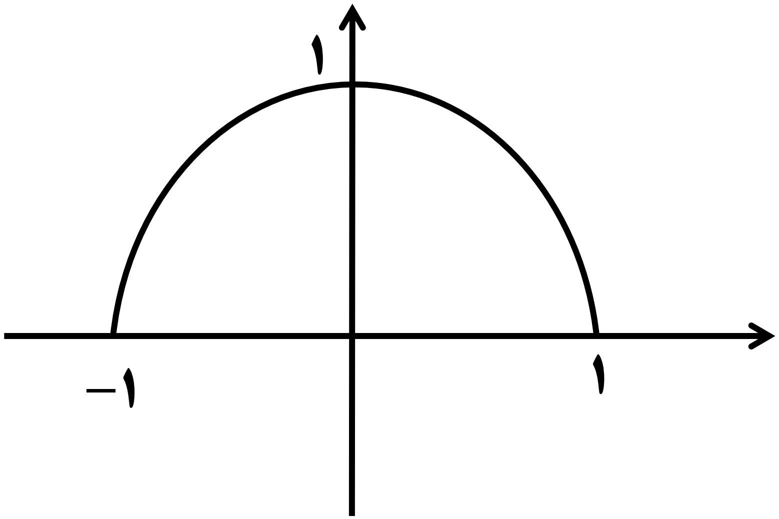
با توجه به منفی بودن(؟) y'' نتیجه می گیریم که تقعر منحنی همواره به سمت پایین است.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	-۱		۰		$+۱$
y'		$+$	۰	$-$	
y	۰	$\nearrow$	۱	$\searrow$	۰

بنابراین نمودار تابع به صورت روبرو می باشد:



مثال: نمودار نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x}{x^۲ - ۱}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow D_f = R - \{\pm ۱\}$$

خطوط $x = ۱$ و $x = -۱$ (ریشه های مخرج) مجانب های قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x \to -۱^-} \frac{x}{x^۲ - ۱} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -۱^+} \frac{x}{x^۲ - ۱} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to ۱^-} \frac{x}{x^۲ - ۱} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{x}{x^۲ - ۱} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

مجانب افقی: خط $y = ۰$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^۲ - ۱} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{+۱}{x} = ۰$$

مجانب مایل: تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$y' = \frac{۱ \times (x^۲ - ۱) - (۲x)(x)}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۱ - ۲x^۲}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{-x^۲ - ۱}{(x^۲ - ۱)^۲} \xRightarrow{y' = ۰} -x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۱ \Rightarrow$$ معادله جواب ندارد

اما درباره ی تعیین علامت y' دقت داشته باشید، چون مخرج y' همواره مثبت است پس علامت y' به علامت صورت وابسته است. درباره ی صورت نیز باید گفت چون $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ ، لذا علامت آن همواره منفی است و تابع همواره نزولی است.

$$y'' = \frac{(-۲x)(x^۲ - ۱)^۲ - ۲ \times ۲x(x^۲ - ۱)(-x^۲ - ۱)}{(x^۲ - ۱)^۴} = \frac{(-۲x)(x^۲ - ۱)^۲ + ۲ \times ۲x(x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱)}{(x^۲ - ۱)^۴}$$

$$= \frac{(x^۲ - ۱)[(-۲x)(x^۲ - ۱) + (۴x)(x^۲ + ۱)]}{(x^۲ - ۱)^۴} = \frac{(x^۲ - ۱)[-۲x^۳ + ۲x + ۴x^۳ + ۴x]}{(x^۲ - ۱)^۴} = \frac{(x^۲ - ۱)[۲x^۳ + ۶x]}{(x^۲ - ۱)^۴}$$

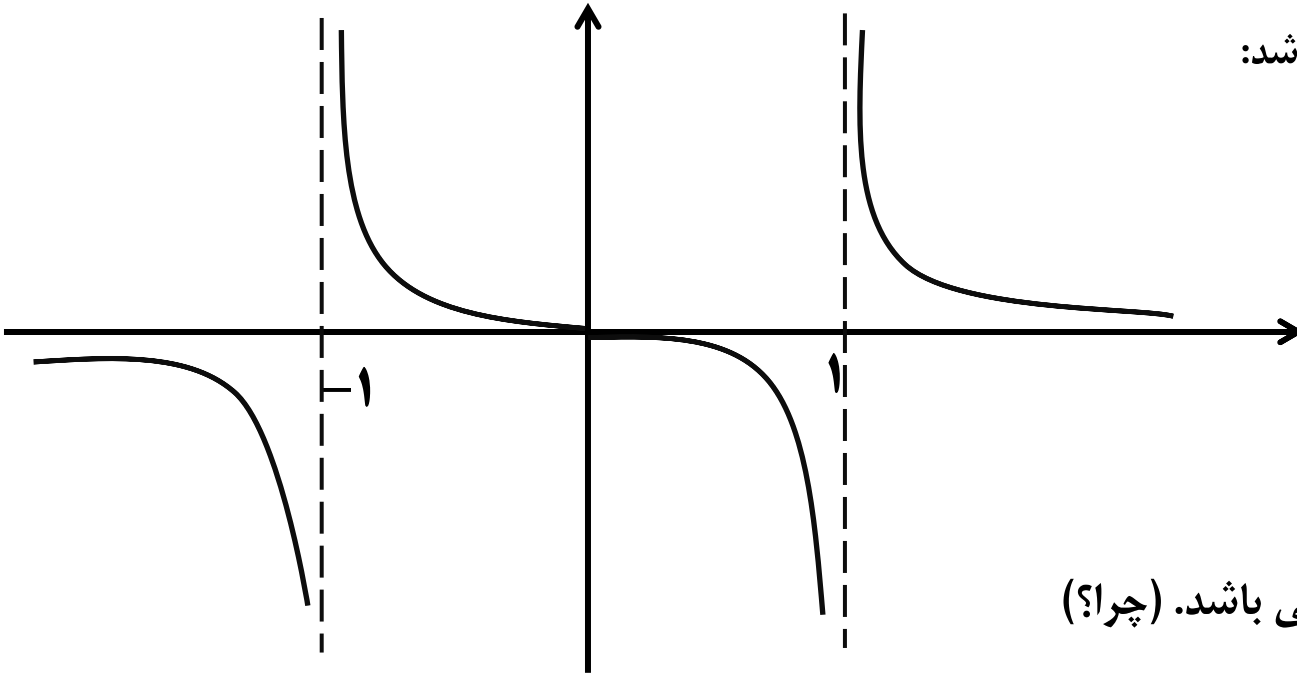
$$= \frac{(x^۲ - ۱)۲x(x^۲ + ۳)}{(x^۲ - ۱)^۴}$$

علامت $\dfrac{۲(x^۲ + ۳)}{(x^۲ - ۱)^۴}$ همواره مثبت است. بنابراین علامت y'' به $x(x^۲ - ۱)$ وابسته است.

جدول تغییرات:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$		$-$	||	$-$	
y	۰	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	۰
x		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x^۲ - ۱$		$+$		$-$		$-$		$+$	
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مبدا مختصات محور تقارن منحنی می باشد. (چرا؟)

مثال: نمودار تابع $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \xRightarrow{\text{معادله جواب ندارد}} D_f = R$$

تابع مجانب قائم ندارد. زیرا به ازای هیچ مقداری حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ نمی شود.

مجانب افقی: خط $y = 0$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

مجانب مایل: تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$y' = \frac{0 \times (1+x^2) - (2x)(1)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \xRightarrow{y'=0} -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(2x)(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)[-2-2x^2+8x^2]}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

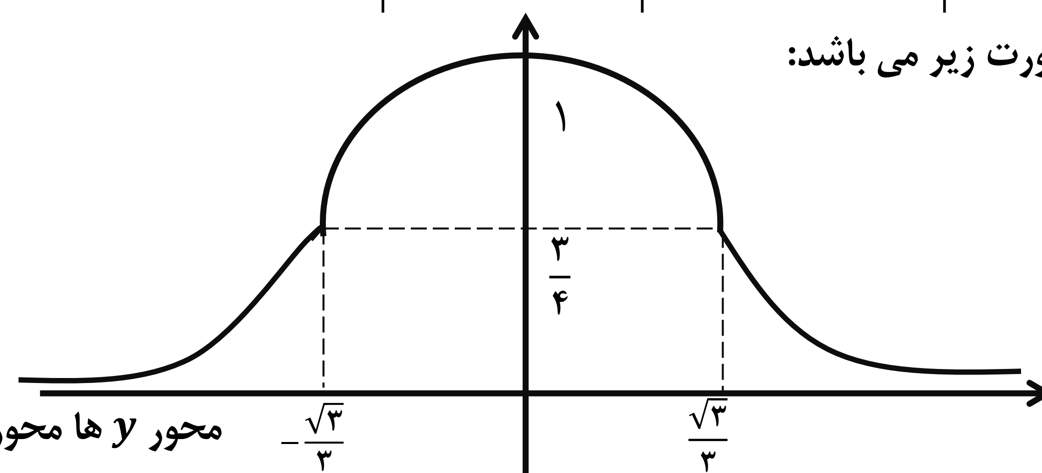
$$\xrightarrow{y''=۰} ۶x^{۲}-۲=۰ \Rightarrow ۶x^{۲}=۲ \Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۱ \\ y=۰ \Rightarrow \text{ی وجود ندارد } x \Rightarrow \text{نمودار با محور } x \text{ ها برخورد نمی کند} \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' و y'' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن ها کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		۰		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	●	$-$		$-$	
y	۰	↗	$\frac{۳}{۴}$	↗	۱	↘	$\frac{۳}{۴}$	↘	۰
y''		$+$	●	$-$		$-$	●	$+$	

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



محور y ها محور تقارن تابع می باشد. چرا(؟)

تابع هموگرافیک:

هر تابع به فرم $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که $c\neq ۰$ و $ad-bc\neq ۰$ را یک تابع هموگرافیک می گوییم.

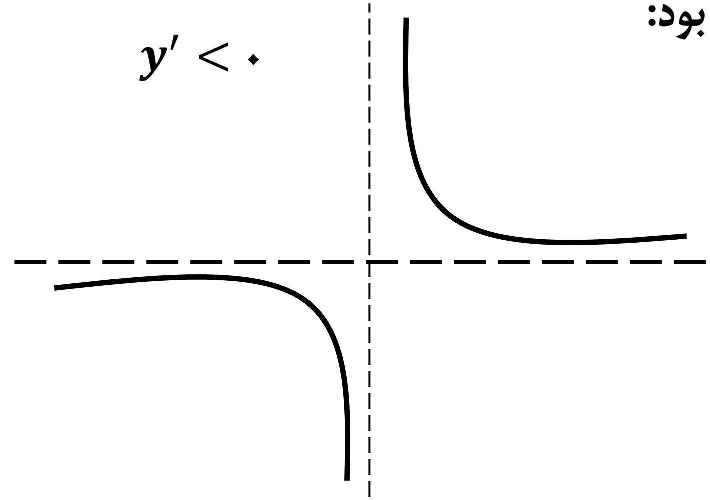
مشتق اول این تابع $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$ می باشد. این تابع یک مجانب قائم به معادله ی $x=-\dfrac{d}{c}$(ریشه ی مخرج)

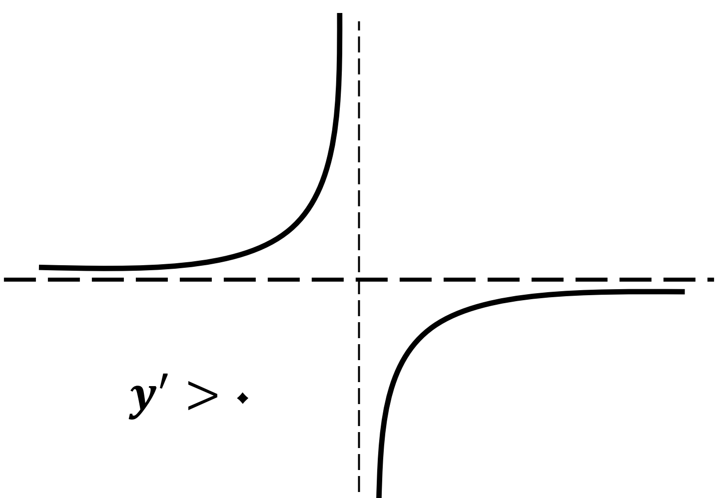
و یک مجانب افقی به معادله ی $y=\dfrac{a}{c}$ دارد. زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax}{cx}=\frac{a}{c}$$

محل برخورد مجانب های قائم و افقی این تابع، نقطه ی $w\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ است که مرکز تقارن منحنی نیز می باشد.

در توابع هموگرافیک، y' همواره مثبت یا همواره منفی است. اگر y' همواره مثبت باشد در نتیجه تابع همواره صعودی است و اگر y' همواره منفی باشد، آن گاه تابع همواره نزولی است. نمودار تابع در اطراف مجانب **قائم** آن به صورت های زیر خواهد بود:





مثال: نمودار تابع $y=\dfrac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج}=\cdot \Rightarrow ۳x+۵=\cdot \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳} \Rightarrow \mathrm{D}_f=\mathrm{R}-\left\{-\frac{۵}{۳}\right\}$$

مجانب قائم: خط $x=-\dfrac{۵}{۳}$ مجانب قائم تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}^-}\frac{۲x+۳}{۳x+۵}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\cdot^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}^+}\frac{۲x+۳}{۳x+۵}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\cdot^+}=-\infty$$

مجانب افقی: خط $y=\dfrac{۲}{۳}$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۳}{۳x+۵}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}$$

تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$y'=\frac{۲(۳x+۵)-۳(۲x+۳)}{(۳x+۵)^۲}=\frac{۶x+۱۰-۶x-۶}{(۳x+۵)^۲}=\frac{۴}{(۳x+۵)^۲}\xrightarrow{y'=\cdot}\text{معادله جواب ندارد}\Rightarrow\text{تابع نقطه ی اکسترمم ندارد}$$

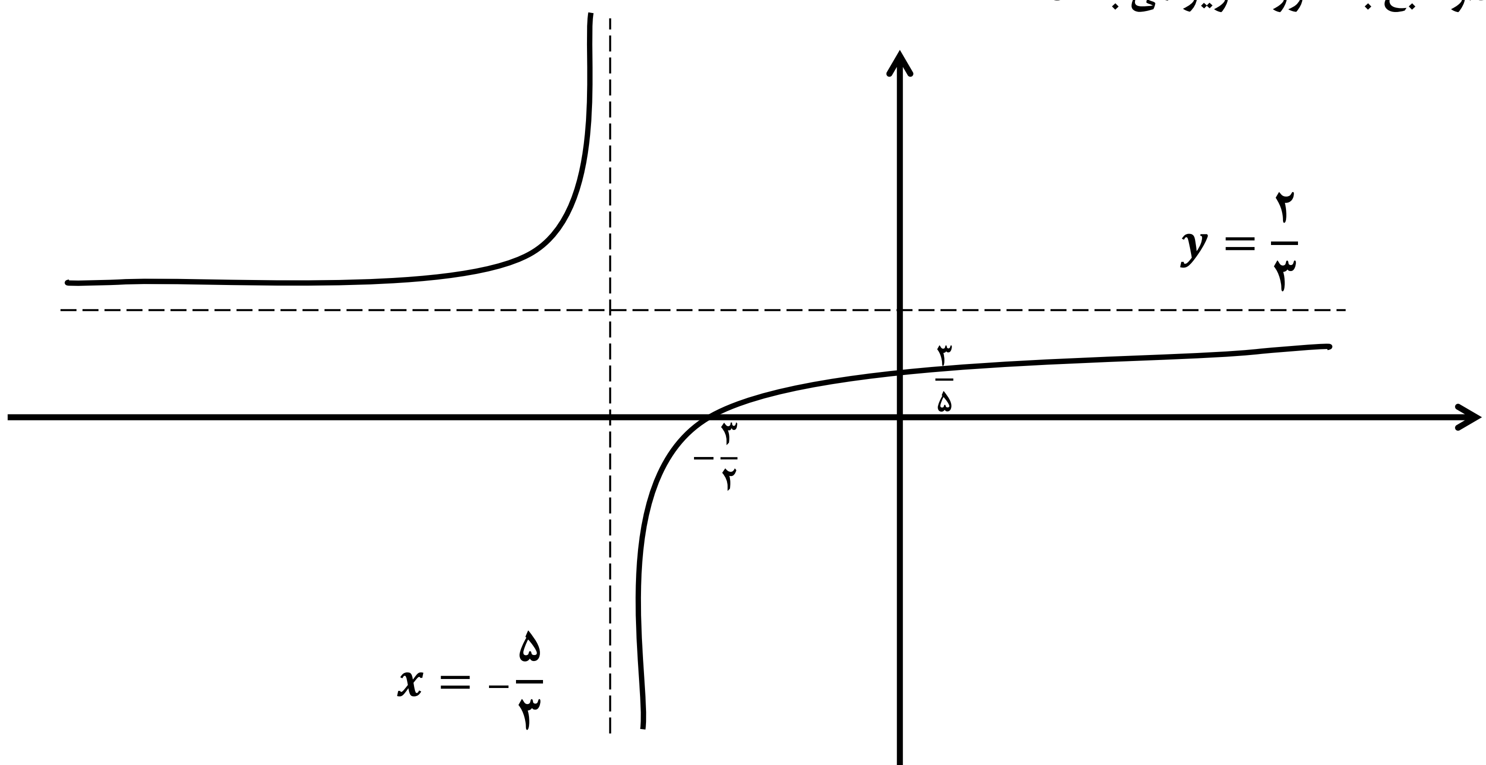
$$y''=\frac{\cdot\times(۳x+۵)^۲-۶(۳x+۵)\times۴}{(۳x+۵)^۴}=\frac{-۲۴(۳x+۵)}{(۳x+۵)^۴}=\frac{-۷۲x-۱۲۰}{(۳x+۵)^۴}\xrightarrow{y''=\cdot}-۷۲x-۱۲۰=\cdot\Rightarrow x=\frac{۱۲۰}{-۷۲}=\frac{-۵}{۳}$$

$$\begin{cases} x=\cdot\Rightarrow y=\dfrac{۳}{۵}\\ y=\cdot\Rightarrow x=-\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم.
حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

x	$-\infty$	$-\frac{۵}{۳}$	$+\infty$
y'	$+$	||	$+$
y	$\frac{۲}{۳}$ ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ $\frac{۲}{۳}$
y''	+ تقعر رو به بالا	||	− تقعر رو به پایین

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی/فصل پنجم:

هندسه مختصاتی و منحنی های درجه دوم

Ordinate geometry ***and*** *quadratic curves*

هندسه ی مختصاتی:

معادله ی خط: معادله ی یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax+by+c=۰$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند. (زیرا در این صورت معادله ی حاصل، که فاقد a و b است، نمایانگر معادله ی یک خط نیست.)

حال اگر طرفین معادله را بر b تقسیم کنیم، داریم: $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ که $-\frac{a}{b}$ را ضریب زاویه یا شیب خط می نامیم.

زاویه ی بین خط $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ با جهت مثبت محور x ها، برابر α است که $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ و $tan\alpha=-\frac{a}{b}$

معادله ی خط:

با در اختیار داشتن شیب (m) و یک نقطه مانند $\left(A(x_A,y_A)\right)$ از یک خط می توان معادله ی آن را به صورت زیر نوشت.

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

هم چنین اگر مختصات دو نقطه مانند $A(x_A,y_A)$ و $\mathrm{B}=(x_B,y_B)$ از خط داده شده باشد، معادله ی خط به صورت زیر نوشته می شود:

$$y-y_A=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)$$

و در نهایت اگر یک نقطه از خط مانند $A(x_A,y_A)$ و زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، داده شده باشد معادله ی خط از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$y-y_A=tan\alpha\ (x-x_A)$$

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(۱,۲)$ بگذرد و جهت مثبت محور طول ها را با زاویه ی ۴۵ درجه قطع کند.

حل:

$$y-y_A=tan\alpha\ (x-x_A)\xRightarrow{A(۱,۲),\alpha=۴۵}y-۲=tan۴۵(x-۱)\Rightarrow y-۲=۱\times(x-۱)\Rightarrow y=x+۱$$

خطوط موازی:

دو خط l و l' را موازی گویند، هرگاه شیب های آن ها یکسان باشند.

مثال: دو خط $y = ۲x + ۳$ و $۳y - ۶x + ۹ = ۰$ با هم موازی هستند. زیرا:

$$\begin{cases} y = ۲x + ۳ \Rightarrow m = ۲ \\ ۳y - ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow ۳y = ۶x - ۹ \Rightarrow y = ۲x - ۳ \Rightarrow m' = ۲ \end{cases}$$

نکته: خطوط $x = \alpha$ و $x = \beta$ با هم موازی اند و به طور مشابه خطوط $y = \alpha$ و $y = \beta$ نیز با هم موازیند.

دو خط عمود بر هم:

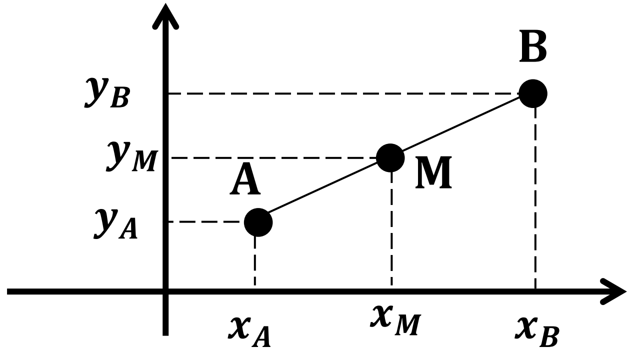
دو خط l و l' به معادلات $y = mx + b$ و $y' = m'x + b'$ را عمود بر هم گوییم، هرگاه حاصل ضرب شیب های آن ها منفی یک شود ($m.m' = -۱$).

مثال: دو خط $y = ۲x + ۴$ و $y = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ عمود بر هم هستند. زیرا:

$$\begin{cases} m = ۲ \\ m' = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m.m' = ۲ \times \frac{-۱}{۲} = -۱ \end{cases}$$

مختصات نقطه ی وسط یک پاره خط:

پاره خط AB با شیب دلخواه m را در صفحه ی مختصات مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. مختصات نقطه ی M وسط این پاره خط برابر است با:

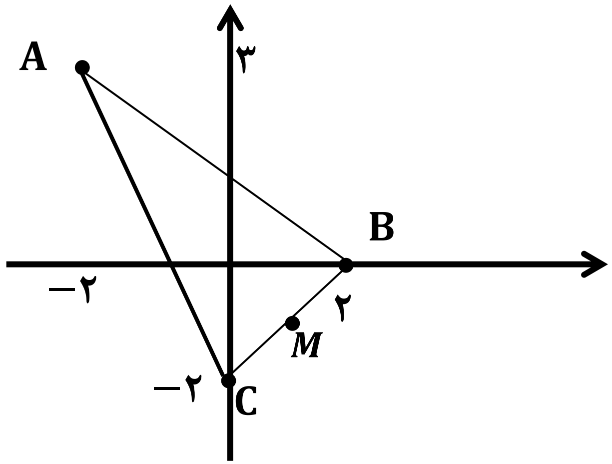


$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

یادآوری: فاصله ی دو نقطه ی $A(x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

مثال: اگر $A(-۲,۳)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,-۲)$ سه راس مثلث ABC باشند، طول میانه ی AM را به دست آورید.

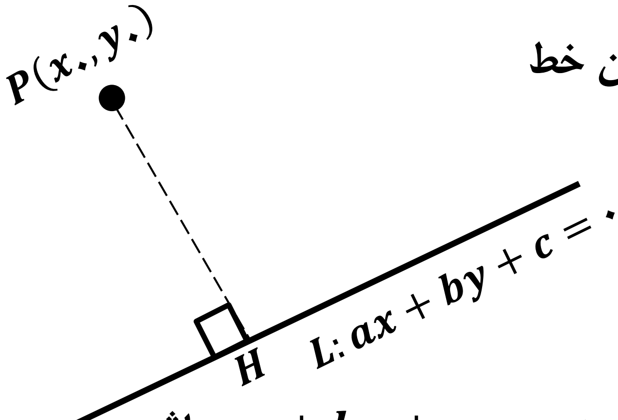


حل: ابتدا نقطه ی وسط پاره خط BC را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{۲+۰}{۲} = \dfrac{۲}{۲} = ۱ \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{۲} = \dfrac{۰-۲}{۲} = \dfrac{-۲}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow M(۱,-۱)$$

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲} = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + \left(۳-(-۱)\right)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

فاصله ی یک نقطه از خط:



اگر خط L به معادله ی $ax + by + c = ۰$ و نقطه ی $P(x_۰, y_۰)$ خارج از این خط مطابق شکل مفروض باشند، آن گاه منظور از فاصله ی نقطه ی P تا خط L ، طول کوتاه ترین پاره خطی است که از نقطه ی P به خط L عمود می شود.
این فاصله از فرمول زیر به دست می آید:

$$d = PH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

قدر مطلق

تذکر: برای استفاده از فرمول بالا، معادله ی خط داده شده حتما باید به صورت $ax + by + c = ۰$ باشد.

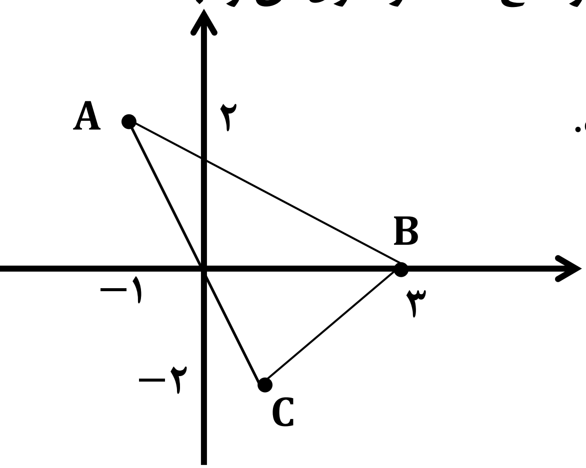
مثال: فاصله ی نقطه ی $A(۱,۴)$ از خط $۴x+۳y=۱۲$ را به دست آورید.

حل: ابتدا معادله ی خط را به صورت $ax+by+c=۰$ می نویسیم.

$$۴x+۳y=۱۲ \Rightarrow ۴x+۳y-۱۲=۰ \Rightarrow PH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \xRightarrow[a=۴,b=۳]{(x_۰,y_۰)=(۱,۴)}$$

$$PH=\frac{|(۴)(۱)+(۳)(۴)-۱۲|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{|۴+۱۲-۱۲|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{|۴|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

مثال: اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه راس مثلث ABC باشند، معادله ی ارتفاع AH و طول آن را به دست آورید.



حل: AH بر BC عمود است. پس شیب AH، قرینه و معکوس شیب BC خواهد بود.

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۰-(-۲)}{۳-۱}=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow m_{AH}=-\frac{۱}{۱}=-۱$$

حال با داشتن شیب خط AH و نقطه ی $A(-۱,۲)$ روی آن، معادله ی AH را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۲=-۱\times\left(x-(-۱)\right) \Rightarrow y-۲=-(x+۱) \Rightarrow y-۲=-x-۱$$

$$\Rightarrow y=-x+۱ \Rightarrow y+x-۱=۰$$

یافتن طول AH مانند آن است که فاصله ی نقطه ی A تا خط BC را به دست آوریم. برای این کار نیاز به معادله خط BC داریم.

$$y-y_B=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}(x-x_B) \quad \Rightarrow y-۰=\frac{۰-(-۲)}{۳-۱}(x-۳) \Rightarrow y=\frac{۲}{۲}(x-۳) \Rightarrow y=x-۳ \Rightarrow y-x+۳=۰$$

$$PH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \xrightarrow[a=-۱,\, b=۱]{(x_۰, y_۰) = (-۱,۲)} PH = \frac{|(-۱)(-۱) + (۱)(۲) + ۳|}{\sqrt{(-۱)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{|۱ + ۲ + ۳|}{\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

فاصله ی دو خط موازی:

دو خط L و L' به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ مفروضند. فاصله ی بین این دو خط از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

تذکر: در معادلات دو خط موازی همواره ضرایب x و y نظیر به نظیر مضربی از هم می باشند. از فرمول بالا زمانی می توان استفاده نمود که ضرایب x و y در دو معادله با هم مساوی باشند. بنابراین اگر ضرایب مساوی نبود، ابتدا با ضرب یا تقسیم کردن، ضرایب را در هر دو معادله یکسان کرده و سپس از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال: فاصله ی دو خط موازی $۲x + ۴y + ۲ = ۰$ و $x + ۲y + ۳ = ۰$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} ۲x + ۴y + ۲ = ۰ \overset{\div ۲}{\Rightarrow} x + ۲y + ۱ = ۰ \\ x + ۲y + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۳|}{\sqrt{(۱)^۲ + (۲)^۲}} = \frac{|-۲|}{\sqrt{۱ + ۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

معادلات خطی:

هر معادله به صورت $a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n = b$ که در آن $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ اعدادی ثابت و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ متغیر(مجهول) می باشند، را یک معادله ی <u>خطی</u> می گوییم.

همان طور که ملاحظه می کنید، توان تمام متغیر ها(مجهول ها) در یک معادله ی خطی برابر یک است.

به عنوان مثال در حالت $n = ۲$ ،معادله ی $۵x_۱ + ۴x_۲ = ۱$ یا $۵x + ۴y = ۱$ معادله ی یک خط راست در صفحه ی مختصات می باشد.

دستگاه معادلات خطی: $System\ of\ linear\ equations$

دستگاه m معادله ی خطی و n مجهولی(یا یک دستگاه خطی)،مجموعه ای است شامل m معادله ی خطی n مجهولی که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} + \cdots + a_{۱n}x_n = b_{۱} \\ a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} + \cdots + a_{۲n}x_n = b_{۲} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m۱}x_{۱} + a_{m۲}x_{۲} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m معادله

n مجهول

در دستگاه بالا، $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n$ مجهولات و بقیه ضرایب معلوم های دستگاه می باشند. منظور از حل دستگاه بالا، یافتن $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n$ هایی است که در همه ی معادلات موجود در دستگاه صدق کند.

در دستگاه بالا اگر $b_{۱} = b_{۲} = \cdots = b_n = ۰$ ، در این صورت دستگاه را همگن می گوییم.

اگر دستگاه خطی بالا، جواب نداشته باشد، دستگاه را ناسازگار و چنان چه دارای جواب باشد، آن را سازگار می گوییم.

مثال: **دستگاه** $\begin{cases} x_{۱} + ۲x_{۲} + ۳x_{۳} = ۶ \\ ۲x_{۱} - ۳x_{۲} + ۲x_{۳} = ۱۴ \\ ۳x_{۱} + x_{۲} - x_{۳} = -۲ \end{cases}$ **،دستگاهی با سه معادله و سه مجهول $x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}$ است که جواب های این دستگاه پس از حل $(x_{۱} = ۱, x_{۲} = -۲, x_{۳} = ۳)$ در هر سه معادله صدق می کند.**

تذکر: **دو دستگاه خطی را هم ارز گوییم هرگاه جواب های آن های یکسان باشند.**

مثال: **دستگاه های دو معادله و دو مجهولی** $\begin{cases} x + y = ۲ \\ x - y = ۴ \end{cases}$ **و** $\begin{cases} ۲x + ۲y = ۴ \\ ۳x - ۳y = ۱۲ \end{cases}$ **هم ارز هستند. زیرا جواب های هر دو دستگاه $(x = ۳, y = -۱)$ با هم برابر است.**

انواع دستگاه ها:

الف) دستگاه دو معادله و دو مجهول به فرم: $\begin{cases} a_۱x + b_۱y = c_۱ \\ a_۲x + b_۲y = c_۲ \end{cases}$

در گذشته با حل چنین دستگاهی به روش حذفی آشنا شده ایم. برای یادآوری و تکمیل، یک مثال حل می کنیم.

$$\begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ = -۳ \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲(x_۱ - ۳x_۲ = -۳) \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۸ \end{cases} = \begin{cases} -۲x_۱ + ۶x_۲ = ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow ۷x_۲ = ۱۴ \Rightarrow x_۲ = ۲$$

حال جواب به دست آمده را در یکی از دستگاه ها قرار داده تا جواب دیگر را به دست آوریم.

$$۲x_۱ + x_۲ = ۸ \xRightarrow{x_۲=۲} ۲x_۱ + ۲ = ۸ \Rightarrow ۲x_۱ = ۶ \Rightarrow x_۱ = ۳$$

بحثی راجع به تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهول:

دستگاه دو معادله و دو مجهول، همیشه دارای یک جواب نیست. گاهی اوقات دارای بیشمار جواب و در مواقعی بدون جواب می باشد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ = ۷ \\ ۲x_۱ - ۶x_۲ = ۷ \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ = ۷ \\ ۲x_۱ - ۶x_۲ = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲(x_۱ - ۳x_۲ = ۷) \\ ۲x_۱ - ۶x_۲ = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x_۱ + ۶x_۲ = -۱۴ \\ ۲x_۱ - ۶x_۲ = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۰ = -۷$$

تساوی به دست آمده، هیچ گاه برقرار نمی باشد. بنابراین دستگاه جواب ندارد.

روش تشخیص تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} a_۱x + b_۱y = c_۱ \\ a_۲x + b_۲y = c_۲ \end{cases}$

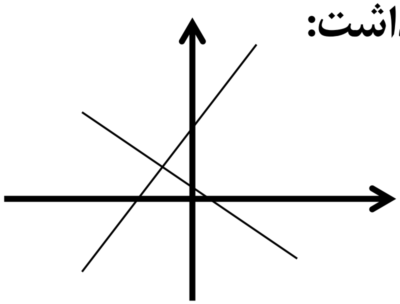
الف) اگر $\frac{b_۱}{b_۲} \neq \frac{a_۱}{a_۲}$، آن گاه دستگاه یک جواب دارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ = ۳ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۱ \end{cases}$ چون $\frac{-۱}{۲} \neq \frac{۲}{۱}$، دارای یک جواب می باشد.

ب) اگر $\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} \neq \frac{c_۱}{c_۲}$ ،آن گاه دستگاه جواب ندارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۵ \end{cases}$ چون $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۵}$ دارای جواب نیست.

ج) اگر $\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} = \frac{c_۱}{c_۲}$ ،آن گاه دستگاه بیشمار جواب دارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۲ \end{cases}$ چون $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ بنابراین بیشمار جواب دارد.

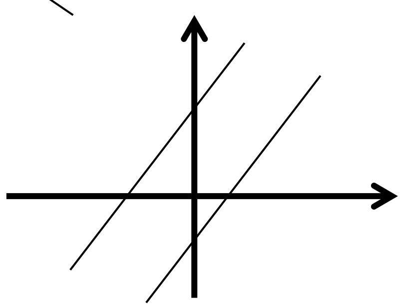
بررسی تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهول به روش هندسی:

دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} a_۱x + b_۱y = c_۱ \\ a_۲x + b_۲y = c_۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می دانیم نمودار هر یک از معادلات این دستگاه خطی راست در صفحه ی مختصات می باشد. منظور از حل دستگاه بالا، در حقیقت یافتن نقاط تلاقی این دو خط راست می باشد که با توجه به موقعیت های دو خط نسبت به هم، یکی از سه حالت زیر را خواهیم داشت:



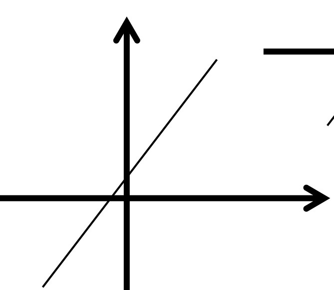
الف) دو خط متقاطعند.

در این حالت مختصات نقاط برخورد جواب های معادله می باشند.



ب) دو خط موازیند.

در این حالت دو خط همدیگر را قطع نمی کنند. بنابراین دستگاه جواب ندارد.



ج) دو خط بر هم منطبقند.

در این حالت دو خط روی هم قرار گرفته و در بی شمار نقطه همدیگر را قطع می کنند.

بنابراین دستگاه بی شمار جواب دارد

ب) دستگاه دو معادله و سه مجهولی $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$

در این حالت چون تعداد مجهولات بیش تر از تعداد معادله ها می باشد، دستگاه بی شمار جواب دارد. مگر آن که معادلات داده شده با یک دیگر تناقض داشته باشند که در این صورت جواب نداریم.

مثال: دستگاه های معادلات خطی زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1(x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = +4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

$$\xRightarrow{\text{جمع دو معادله}} x_1 - x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = x_2 + 8 (\mathrm{I})$$

در این رابطه x_1 برحسب x_2 می باشد. مقدار x_1 با توجه به اینکه x_2 چه عددی است، به دست می آید.

حال با جایگذاری رابطه ی (I) در معادله ی اول دستگاه داده شده، x_3 را نیز برحسب x_2 به دست می آوریم.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \xRightarrow{x_1 = x_2 + 8} x_2 + 8 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \Rightarrow 3x_2 - 3x_3 = -12 \xRightarrow{\div 3} x_2 - x_3 = -4$$

$$\Rightarrow -x_3 = -x_2 - 4 \Rightarrow x_3 = x_2 + 4$$

بنابراین جواب دستگاه داده شده برابر است با: $\begin{cases} x_1 = x_2 + 8 \\ x_3 = x_2 + 4 \\ x_2: \text{عدد حقیقی دلخواه} \end{cases}$

به عبارت دیگر دستگاه داده شده، بی نهایت جواب دارد. زیرا به ازای هر x_2 دلخواهی که به دستگاه می دهیم، جوابی برای x_1 و x_3 به دست می آید. به عنوان مثال داریم: $\begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8, x_3 = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 9, x_3 = 5 \end{cases}$

به همین ترتیب می توانیم بی شمار مقدار دیگر برای $x_۲$ در نظر بگیریم و با جایگذاری در جواب دستگاه، بی شمار مقدار برای $x_۱$ و $x_۳$ به دست آوریم.

ب) $\begin{cases} ۳x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ = ۸ \\ ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲(۳x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ = ۸) \\ ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۱۶ \\ ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۳ \end{cases}$

سمت چپ معادلات دستگاه بالا باهم برابر است. اما سمت راست آنها متفاوت است. که این یک تناقض است. در چنین حالتی دستگاه جواب ندارد.

ج) دستگاه سه معادله و سه مجهولی $\begin{cases} a_۱x + b_۱y + c_۱z = d_۱ \\ a_۲x + b_۲y + c_۲z = d_۲ \\ a_۳x + b_۳y + c_۳z = d_۳ \end{cases}$

برای حل دستگاه بالا مراحل زیر را اجرا می کنیم:

مرحله ی اول: می توان (مثلا) معادلات اول و دوم را با هم و (مثلا) معادلات اول و سوم را نیز با هم درون دستگاههای جداگانه قرار داده و سپس یکی از متغیرها (مثلا x) را در هر دو دستگاه جدید حذف کنیم.

به عنوان مثال در دستگاه $\begin{cases} x + ۲y + ۳z = ۶ \\ ۲x - ۳y + ۲z = ۱۴ \\ ۳x + y - z = -۲ \end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases} x + ۲y + ۳z = ۶ \\ ۲x - ۳y + ۲z = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲(x + ۲y + ۳z = ۶) \\ ۲x - ۳y + ۲z = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x - ۴y - ۶z = -۱۲ \\ ۲x - ۳y + ۲z = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow -۷y - ۴z = ۲ \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} x + ۲y + ۳z = ۶ \\ ۳x + y - z = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳(x + ۲y + ۳z = ۶) \\ ۳x + y - z = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳x - ۶y - ۹z = -۱۸ \\ ۳x + y - z = -۲ \end{cases} \Rightarrow -۵y - ۱۰z = -۲۰ \quad (\mathrm{II})$$

مرحله ی دوم: معادلات به دست آمده بعد از حذف متغیر(در این جا x) را در یک دستگاه قرار داده، سپس دستگاه را حل می کنیم.

$$\begin{cases} -۷y-۴z=۲ \\ -۵y-۱۰z=-۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵(-۷y-۴z=۲) \\ -۲(-۵y-۱۰z=-۲۰) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳۵y-۲۰z=۱۰ \\ +۱۰y+۲۰z=۴۰ \end{cases} \Rightarrow -۲۵y=۵۰ \Rightarrow y=-۲$$

حال جواب به دست آمده را در یکی از دستگاه ها قرار داده تا جواب دیگر را به دست آوریم.

$$-۷y-۴z=۲ \xRightarrow{y=-۲} -۷(-۲)-۴z=۲ \Rightarrow ۱۴-۴z=۲ \Rightarrow -۴z=-۱۲ \Rightarrow z=۳$$

مرحله ی سوم: مقادیر به دست آمده را در یکی از معادلات دستگاه داده شده قرار می دهیم تا مجهول سوم نیز به دست آید.

$$x+۲y+۳z=۶ \xRightarrow{y=-۲,z=۳} x+۲(-۲)+۳(۳)=۶ \Rightarrow x-۴+۹=۶ \Rightarrow x=۶-۵=۱$$

تذکر: اگر دستگاه سه معادله و سه مجهولی به فرم $\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{P}=\dfrac{y+\beta}{q}=\dfrac{z+\gamma}{r} \\ ax+by+cz=d \end{cases}$ بیان شود، کافی است هر سه کسر داده شده در $\dfrac{x+\alpha}{P}=\dfrac{y+\beta}{q}=\dfrac{z+\gamma}{r}$ را مساوی t قرار داده و سپس سه مجهول را بر حسب t به دست آورده و در نهایت با جایگذاری مجهولات برحسب t در معادله ی $ax+by+cz=d$ ابتدا t را به دست آورده و در نهایت با داشتن t ، تمامی متغیرها حاصل می شوند.

مثال: دستگاه $\begin{cases} \dfrac{x}{۲}=\dfrac{y}{۳}=\dfrac{z}{۴} \\ x+y+z=۹ \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{z}{۴}=t \Rightarrow z=۴t \qquad \frac{y}{۳}=t \Rightarrow y=۳t \qquad \frac{x}{۲}=t \Rightarrow x=۲t$$

$$x + y + z = ۹ \xrightarrow{x=۲t, y=۳t, z=۴t} ۲t + ۳t + ۴t = ۹ \Rightarrow ۹t = ۹ \Rightarrow t = ۱$$

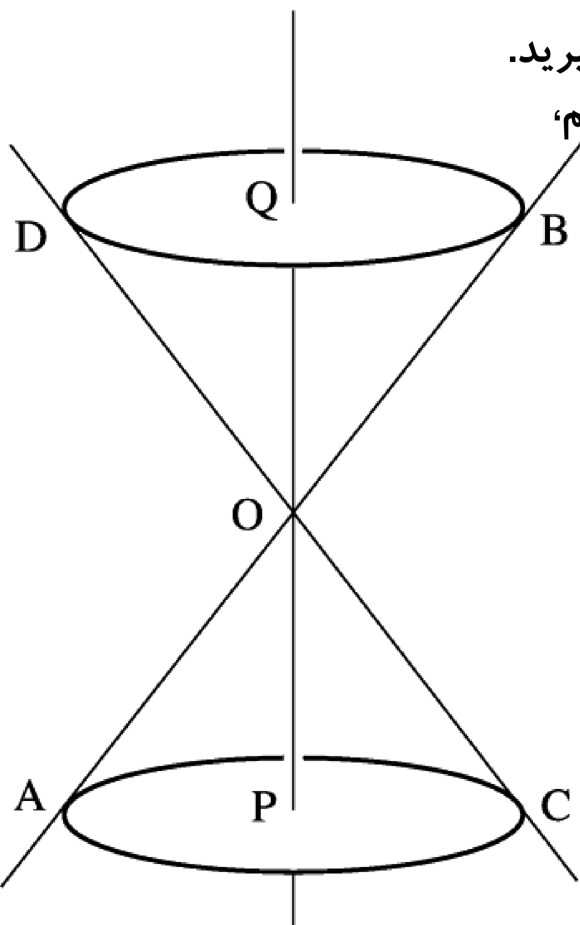
با به دست آمدن t تمامی مجهولات محاسبه می شوند:

$$x = ۲t \xrightarrow{t=۱} x = ۲ \qquad y = ۳t \xrightarrow{t=۱} y = ۳ \qquad z = ۴t \xrightarrow{t=۱} z = ۴$$

منحنی های درجه دوم:

سطح مخروطی دوار:

دو خط متقاطع AB و PQ که زاویه ی بین آن ها θ $(\theta < ۹۰^{\circ})$ است، را در نظر بگیرید.
اگر خط PQ را ثابت نگه داشته و خط AB را حول خط PQ با زاویه ی θ دوران دهیم، سطحی مانند شکل مقابل به دست می آید که به آن **سطح مخروطی دوار** می گوییم.



در این شکل، نقطه ی O را راس، خط ثابت PQ را محور سطح مخروطی دوار و خط AB را مولد سطح مخروطی دوار می نامیم.

حال اگر صفحه ای این سطح مخروطی دوار را قطع کند، منحنی هایی که در محل برخورد صفحه و سطح مخروطی دوار به وجود می آیند(فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی دوار)را **مقاطع مخروطی** می گوییم.

در معادله ی این منحنی ها، x یا y و یا هر دو از درجه ی ۲ می باشند و به همین دلیل آن ها را منحنی های درجه دوم می نامیم.

بسته به اینکه صفحه با چه وضعیتی سطح مخروطی دوار را قطع کند، چهار منحنی درجه دوم مهم زیر می توانند به دست آیند:

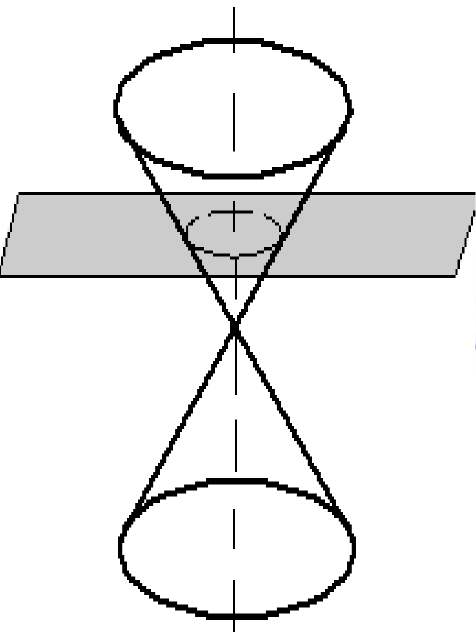
۱– دایره: اگر مانند شکل ۱، صفحه به صورت افقی مخروط را قطع کند، منحنی ایجاد شده دایره می باشد.
(صفحه عمود بر محور سطح مخروطی دوار)

۲– بیضی: اگر مانند شکل۲، صفحه به صورت مایل مخروط را قطع کند، منحنی ایجاد شده یک بیضی می باشد.

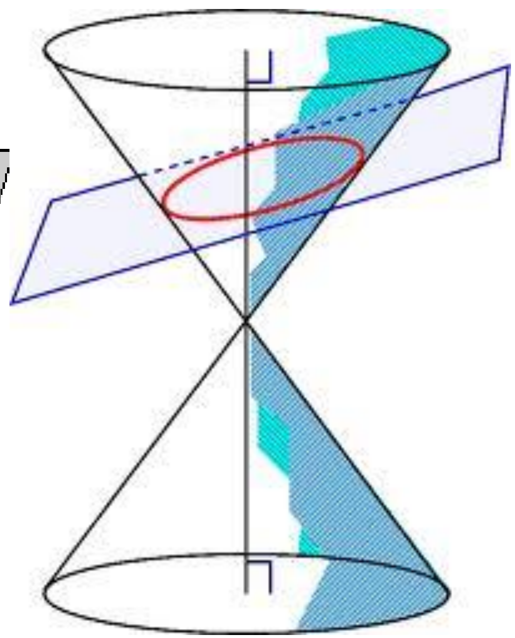
۳– سهمی: اگر مانند شکل۳، صفحه را باز هم مایل تر کنیم، به طوری که با یکی از مولدهای سطح مخروطی دوار موازی باشد، منحنی ایجاد شده، یک سهمی است:

۴– هذلولی: اگر مانند شکل ۴، صفحه موازی محور مخروط باشد، منحنی ایجاد شده را یک هذلولی می نامیم.

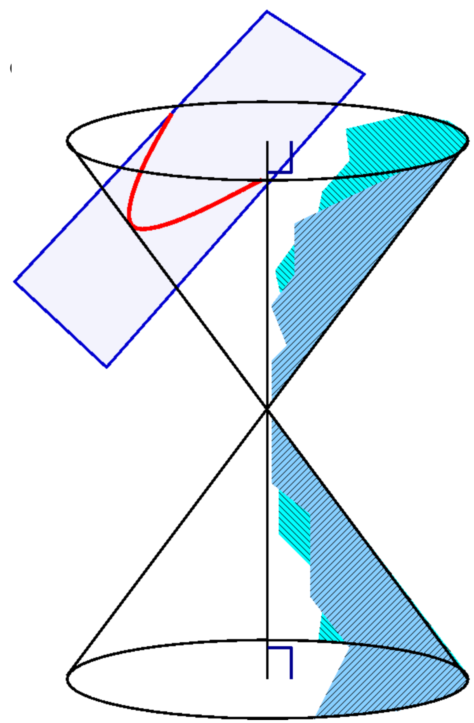
در ادامه به مطالعه ی ویژگی های این منحنی های درجه دو می پردازیم.



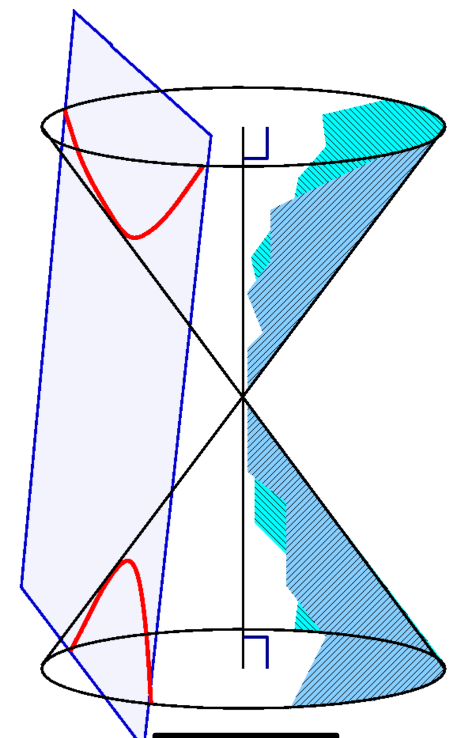
شکل ۱



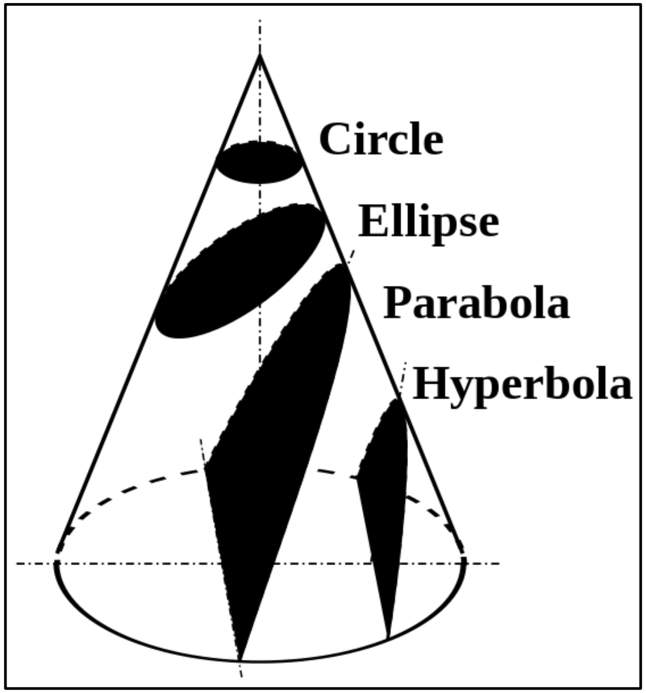
شکل ۲

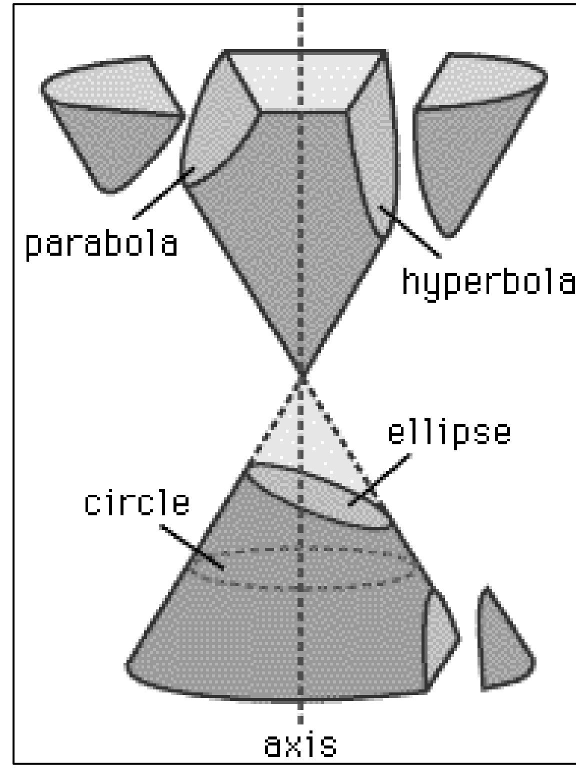


شکل ۳

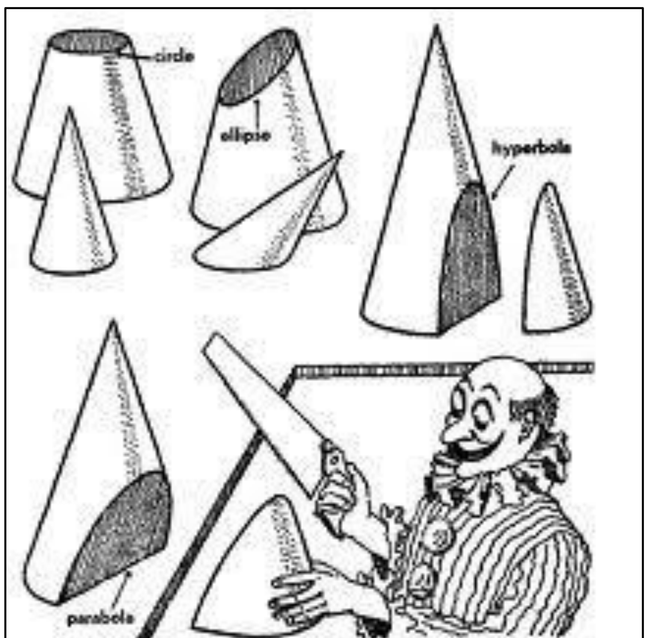


شکل ۴

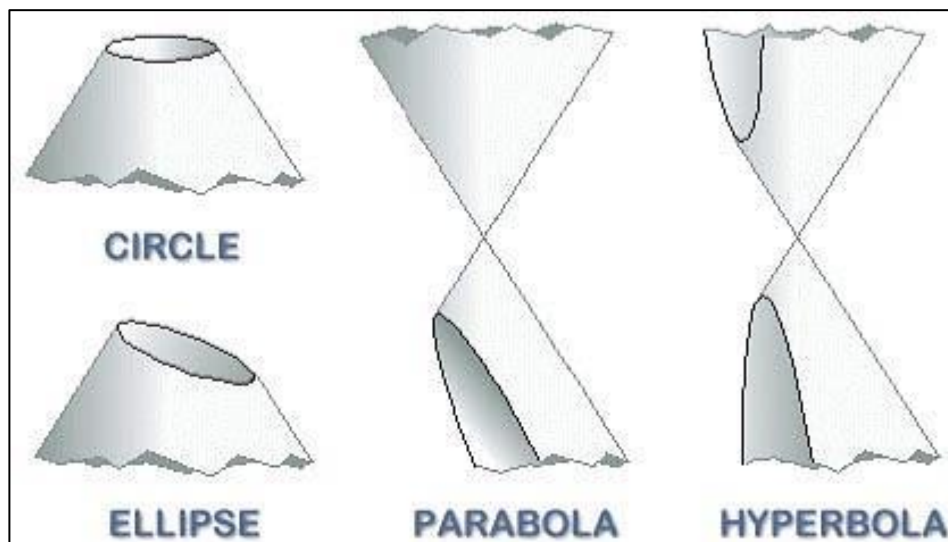




Animation

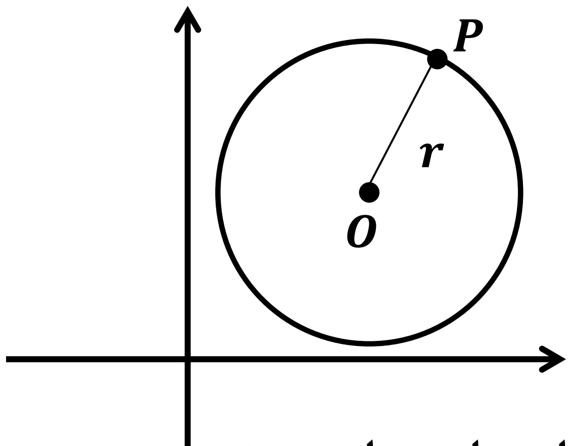


Conic sections have different shapes and different names.



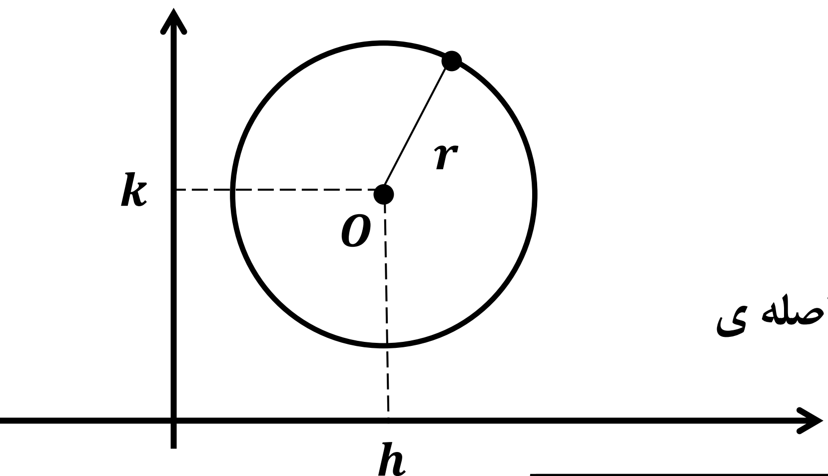
دایره: $(Circle)$

مجموعه ی نقاطی از صفحه ی مختصات (مانند P) که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت (O)، مقداری ثابت (r) باشد، **دایره** نامیده می شود.



نقطه ثابت O را مرکز دایره و مقدار ثابت r را شعاع دایره می نامیم.

معادله ی دایره: اگر نقطه ی $O(h,k)$ مرکز یک دایره باشد و اندازه ی شعاع این دایره برابر r باشد، معادله ی دایره به صورت زیر خواهد بود:



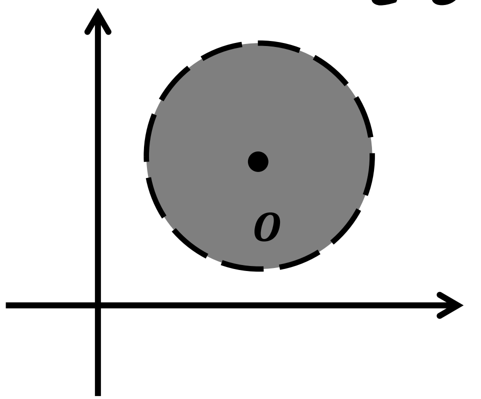
$$(x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲$$

برهان: فرض کنیم نقطه ی $P(x,y)$ روی این دایره باشد، چون فاصله ی P از O برابر مقدار ثابت r است، داریم:

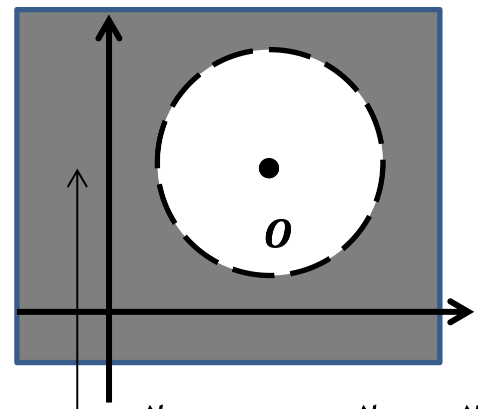
$$|OP|=r \Rightarrow \sqrt{(x-h)^۲+(y-k)^۲}=r \xRightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲$$

حال اگر فاصله ی نقطه ای از صفحه ی مختصات، از مرکز دایره $O(h,k)$، کم تر از شعاع دایره r باشد، آن نقطه درون دایره، و اگر این فاصله بیش تر از باشد، نقطه خارج از دایره قرار دارد.

به عبارت دیگر، نامعادله ی $(x-h)^۲+(y-k)^۲<r^۲$ ، مجموعه نقاط درون دایره به مرکز $O(h,k)$ و شعاع r و نامعادله ی $(x-h)^۲+(y-k)^۲>r^۲$ مجموعه نقاط خارج از این دایره را مشخص می کند.



$(x-h)^۲+(y-k)^۲<r^۲$



$(x-h)^۲+(y-k)^۲>r^۲$

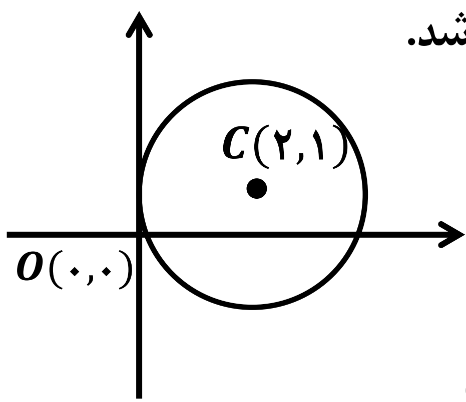
17

مثال: معادله ی دایره ای به شعاع ۳ و مرکز $O(-۳,۲)$ را بنویسید.

حل:

$$(x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲ \xrightarrow{(h,k)=(-۳,۲),\,r=۳} (x+۳)^۲+(y-۲)^۲=۹$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقطه ی $O(۰,۰)$ گذشته و $C(۲,۱)$ مرکز آن باشد.



حل: با محاسبه ی OC شعاع دایره را به دست می آوریم:

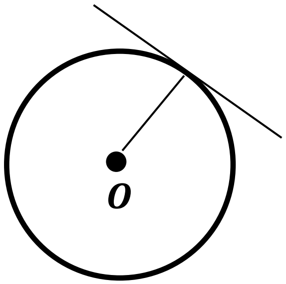
$$r=OC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

حال با جایگذاری در معادله دایره داریم:

$$(x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲ \xrightarrow[r=\sqrt{۵}]{(h,k)=(۲,۱),} (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=\left(\sqrt{۵}\right)^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که مرکزش $C(۱,۲)$ بوده و خط $۳x + ۴y + ۱ = ۰$ بر آن مماس باشد.

حل:



هرگاه خطی بر دایره مماس شود، فاصله ی مرکز دایره از آن خط، برابر شعاع آن دایره است.
زیرا شعاعی از دایره که از نقطه ی تماس می گذرد، بر خط مماس عمود است.
بنابراین برای به دست آوردن شعاع دایره کافی است فاصله ی مرکز دایره از خط مماس را بیابیم.

$$r = d = \frac{|ax_. + by_. + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳ \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۱|}{\sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲}} = \frac{|۳ + ۸ + ۱|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|۱۲|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = r^۲ \xRightarrow[r = \frac{۱۲}{۵}]{(h,k) = (۱,۲),} (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = \left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۱۴۴}{۲۵}$$

معادله ی گسترده ی دایره:

همان طور که گفتیم معادله ی یک دایره به مرکز $O(h,k)$ و به شعاع r به صورت زیر است:

$$(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = r^۲$$

حال با توجه به اتحاد مربع دو جمله ای داریم:

$$x^۲ - ۲hx + h^۲ + y^۲ - ۲yk + k^۲ = r^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲hx - ۲ky + h^۲ + k^۲ - r^۲ = ۰$$

در فرمول بالا، k،h و r، اعداد حقیقی ثابت هستند. پس اگر قرار دهیم:

$$h^۲ + k^۲ - r^۲ = \mathrm{F} \text{ و } -۲y = E \text{ ،} -۲h = D$$

معادله ی زیر به دست می آید که به آن فرم گسترده ی معادله ی دایره می گوییم.

$$x^۲ + y^۲ + Dx + Ey + F = ۰$$

هرگاه این فرم از معادله ی دایره را داشته باشیم، می توانیم مرکز و شعاع دایره را از روابط زیر به دست آوریم:

مرکز : $O\left(\frac{-D}{۲},\frac{-E}{۲}\right)$ شعاع : $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲+E^۲-۴F}$

برهان:

$$\left.\begin{aligned} D=-۲h \Rightarrow h=-\frac{D}{۲} \\ E=-۲k \Rightarrow k=-\frac{E}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow O\left(\frac{-D}{۲},\frac{-E}{۲}\right)=(h,k)$$

$$D^۲+E^۲-۴F=(-۲h)^۲+(-۲k)^۲-۴\left(h^۲+k^۲-r^۲\right)=۴h^۲+۴k^۲-۴h^۲-۴k^۲+۴r^۲=۴r^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲+E^۲-۴F}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴r^۲}=\frac{۱}{۲}(۲r)=r$$

تذکر: در فرم گسترده ی معادله ی دایره، ممکن است $x^۲$ و $y^۲$ ضریب عددی داشته باشند که حتما باهم برابر هستند. (در غیر این صورت معادله ی دایره نمی باشد.) در این صورت برای پیدا کردن مرکز و شعاع، ابتدا طرفین معادله را بر این ضریب عددی تقسیم می کنیم.

مثال: مرکز و شعاع دایره به معادله ی $۲x^۲+۲y^۲-۴x+۶y-۸=۰$ را به دست آورید.

حل:

$$۲x^۲+۲y^۲-۴x+۶y-۸=۰ \xRightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-\underset{D}{۲}x+\underset{E}{۳}y-\underset{F}{۴}=۰$$

$$O\left(\frac{-D}{۲},\frac{-E}{۲}\right)=\left(\frac{-(-۲)}{۲},\frac{-۳}{۲}\right)=\left(۱,-\frac{۳}{۲}\right) \qquad r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲+E^۲-۴F}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲-۴(-۴)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۹}$$

مثال: مقدار Fرا طوری تعیین کنید که $x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۶y + \mathrm{F} = ۰$ معادله ی دایره ای به شعاع ۲را مشخص کند.

حل:

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲} + E^{۲} - ۴F} \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^{۲} + ۶^{۲} - ۴(F)} \Rightarrow ۴ = \sqrt{۴ + ۳۶ - ۴F} \Rightarrow ۴ = \sqrt{۴۰ - ۴F}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱۶ = ۴۰ - ۴F \Rightarrow ۱۶ - ۴۰ = -۴F \Rightarrow -۲۴ = -۴F \Rightarrow F = ۶$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(۰,۰)$ ، $B(۱,-۱)$ و $C(۱,۶)$ بگذرد. مرکز و شعاع دایره را نیز بیابید.

حل: برای حل این مثال از معادله ی گسترده ی دایره استفاده می کنیم. می دانیم معادله گسترده ی دایره به صورت $x^{۲} + y^{۲} + Dx + Ey + F = ۰$ است. برای نوشتن معادله ی دایره، کافی است پارامترهای D ، E و F را به دست آوریم. نقاط A ، B و C روی دایره قرار دارند. پس مختصات آن ها در معادله ی دایره صدق می کند.

$$A(۰,۰) \xRightarrow{x=۰,y=۰} ۰^{۲} + ۰^{۲} + D(۰) + E(۰) + F = ۰ \Rightarrow F = ۰$$

$$B(۱,-۱) \xRightarrow{x=۱,y=-۱,\mathrm{F}=۰} ۱^{۲} + (-۱)^{۲} + D(۱) + E(-۱) + ۰ = ۰ \Rightarrow D - E = -۲(\mathrm{I})$$

$$C(۱,۶) \xRightarrow{x=۱,y=۶,\mathrm{F}=۰} ۱^{۲} + ۶^{۲} + D(۱) + E(۶) + ۰ = ۰ \Rightarrow D + ۶E = -۳۷(\mathrm{II})$$

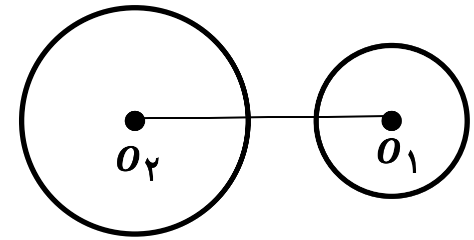
$$\xRightarrow{(\mathrm{I})\ \text{و}\ (\mathrm{II})} \begin{cases} D - E = -۲ \\ D + ۶E = -۳۷ \end{cases} \xRightarrow{\text{حل دستگاه}} D = -۷\ E = -۵$$

بنابراین معادله ی گسترده ی دایره به صورت $x^{۲} + y^{۲} - ۷x - ۵y = ۰$ می باشد.

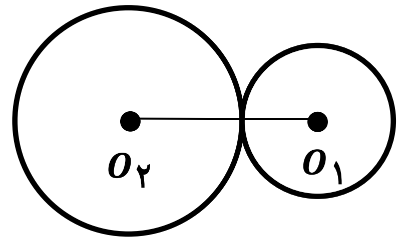
$$\mathrm{O}\left(\frac{-D}{۲},\frac{-E}{۲}\right) = \left(\frac{-(-۷)}{۲},\frac{-(-۵)}{۲}\right) = \left(\frac{۷}{۲},\frac{۵}{۲}\right) \quad r = \frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲} + E^{۲} - ۴F} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۷)^{۲} + (-۵)^{۲} - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۷۴}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

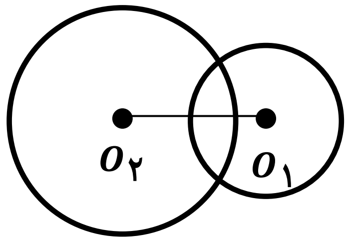
دو دایره یکی به مرکز O_1 و شعاع r_1 و دیگری به مرکز O_2 و شعاع r_2 را در نظر می گیریم. وضعیت این دو دایره نسبت به هم می تواند به یکی از حالت های زیر باشد:



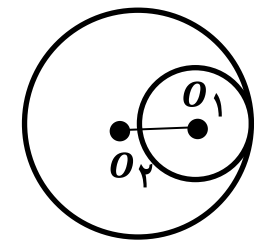
الف



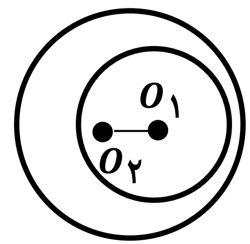
ب



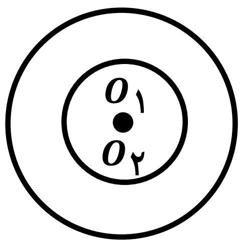
ج



د



ه



و

حال در هر یک از این حالت ها، اندازه ی فاصله ی مرکزهای دو دایره یعنی پاره خط $O_1 O_2$ را با $r_1 + r_2$ و $|r_1 - r_2|$ مقایسه می کنیم.

الف) در این حالت، دو دایره **متخارج** (خارج از هم) هستند و طبق شکل مشخص است که فاصله ی مرکزهای دو دایره از مجموع شعاع ها بیش تر است.

$$O_1 O_2 > r_1 + r_2$$

ب) در این حالت، دو دایره **مماس خارج** هستند و فاصله های O_1 و O_2 برابر مجموع شعاع های دو دایره است.

$$O_1 O_2 = r_1 + r_2$$

ج) در این حالت، دو دایره **متقاطع** هستند و هم دیگر را در دو نقطه قطع می کنند و داریم:

$$|r_1 - r_2| < O_1 O_2 < r_1 + r_2$$

د) در این حالت، دو دایره مماس داخل هستند و داریم: $O_۱O_۲ = |r_۱ - r_۲|$

ه) در این حالت، دو دایره متداخل هستند و داریم: $۰ \leq O_۱O_۲ \leq |r_۱ - r_۲|$

و) این حالت، حالتی خاص از دو دایره ی متداخل است که مرکزهای دو دایره بر هم منطبق شده و دو دایره هم مرکز هستند. پس $O_۱O_۲ = ۰$

بنابراین برای تعیین وضعیت دو دایره، اندازه ی پاره خط $O_۱O_۲$ را پیدا کرده و با مقایسه ی آن با $r_۱ + r_۲$ و $|r_۱ - r_۲|$ به یکی از حالت های گفته شده می رسیم.

مثال: وضعیت دایره های زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۴۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\mathrm{O}_۱\left(\frac{-D}{۲}, \frac{-E}{۲}\right) = \left(\frac{-۲}{۲}, \frac{-(-۴)}{۲}\right) = (-۱, ۲)$$

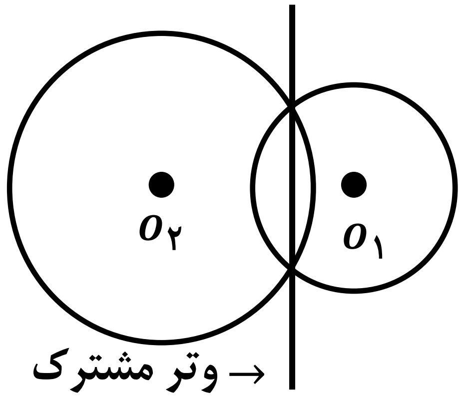
$$\mathrm{O}_۲\left(\frac{-D}{۲}, \frac{-E}{۲}\right) = \left(\frac{-(-۲)}{۲}, \frac{-۴}{۲}\right) = (۱, -۲)$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{\left(x_{O_۱} - x_{O_۲}\right)^۲ + \left(y_{O_۱} - y_{O_۲}\right)^۲} = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + \left(۲ - (-۲)\right)^۲} = \sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\left.\begin{aligned} r_۱ &= \frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲ + E^۲ - ۴F} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \sqrt{۵} \\ r_۲ &= \frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲ + E^۲ - ۴F} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۴^۲ - ۴(-۴۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۸۰} = ۳\sqrt{۵} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r_۱ + r_۲ = ۴\sqrt{۵} \\ |r_۱ - r_۲| = ۲\sqrt{۵} \end{cases}$$

$\Rightarrow O_۱O_۲ = |r_۱ - r_۲| \Rightarrow$ دو دایره مماس داخل هستند

وتر مشترک دو دایره ی متقاطع:



در حالتی که دو دایره متقاطع باشند و هم دیگر را در دو نقطه قطع کنند، $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ ، خطی که از دو نقطه ی تقاطع می گذرد را **وتر مشترک دو دایره** می گوییم.

معادله ی وتر مشترک دو دایره:

فرض کنیم معادله ی دو دایره ی متقاطع به صورت های $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$ **باشد.**

در این صورت معادله ی وتر مشترک از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$C_1 - C_2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 - \left(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

مثال: معادله ی وتر مشترک دایره های $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$ را بنویسید.

حل:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \Rightarrow \big(6 - (-4)\big)x + \big(8 - (-6)\big)y + \big(0 - (-14)\big) = 0$$

$$\Rightarrow 10x + 14y + 14 = 0 \xRightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 2} 5x + 7y + 7 = 0$$

مثال: ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله های زیر را به دست آورید.

$$x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y - ۲۰ = ۰ \qquad \text{و} \qquad x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۲۴ = ۰$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید.

حل:

$$(D_۱ - D_۲)x + (E_۱ - E_۲)y + (F_۱ - F_۲) = ۰ \Rightarrow (۴ - ۲)x + (۲ - ۲)y + \left(-۲۰ - (-۲۴)\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x + ۴ = ۰ \xRightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow \text{وتر مشترک موازی محور } y \text{ ها است}$$

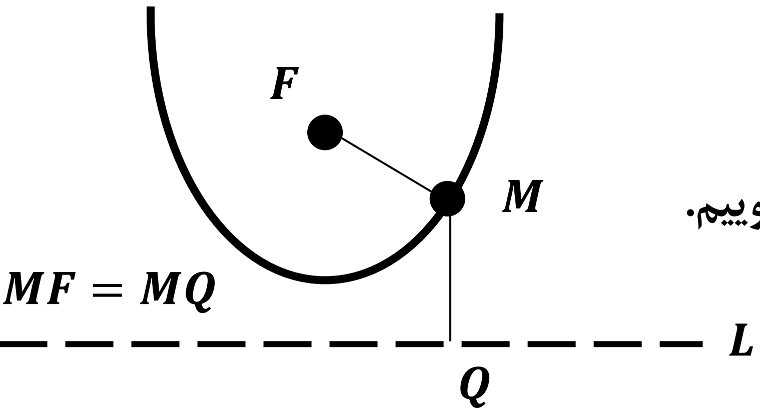
برای یافتن نقاط تقاطع دو دایره، چون این نقاط روی دو دایره و روی وتر مشترک قرار دارند، مختصات آن ها را می توانیم با قطع دادن وتر مشترک با یکی از دایره ها، به دست آوریم:

$$\begin{cases} x = -۲ \\ x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y - ۲۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-۲)^۲ + y^۲ + ۴(-۲) + ۲y - ۲۰ = ۰ \Rightarrow ۴ + y^۲ - ۸ + ۲y - ۲۰ = ۰ \Rightarrow y^۲ + ۲y - ۲۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (y - ۴)(y + ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ \\ y = -۶ \end{cases} \xRightarrow{\text{مختصات نقاط تقاطع دو دایره}} A = (-۲,۴), B = (-۲,-۶)$$

سهمی: $(Prabola)$



سهمی، مجموعه ی تمام نقاطی از صفحه است که فاصله ی آن ها از یک نقطه ی ثابت (F) و یک خط ثابت (L) یکسان می باشد.
نقطه ی ثابت F را **کانون سهمی** و خط ثابت L را خط **هادی سهمی** می گوییم.

اصطلاحات مهم در سهمی:

۱) **محور سهمی (محور تقارن سهمی):** خطی است که از کانون سهمی گذشته و بر خط هادی عمود است.

۲) **راس سهمی:** نقطه ی تلاقی محور تقارن سهمی با سهمی را راس سهمی می گوییم و آن را با حرف S نمایش می دهیم.

۳) **فاصله ی کانونی سهمی:** فاصله ی راس سهمی از کانون F یا فاصله ی راس سهمی از خط هادی را فاصله ی کانونی نامیده و آن را با P نمایش می دهیم.

انواع سهمی:

الف) سهمی افقی: سهمی را افقی گوییم هرگاه محور سهمی موازی محور x ها باشد. معادله ی سهمی افقی اگر مختصات راس سهمی $S(\alpha,\beta)$ و فاصله ی کانونی عدد مثبت P باشد، به یکی از حالات زیر است:

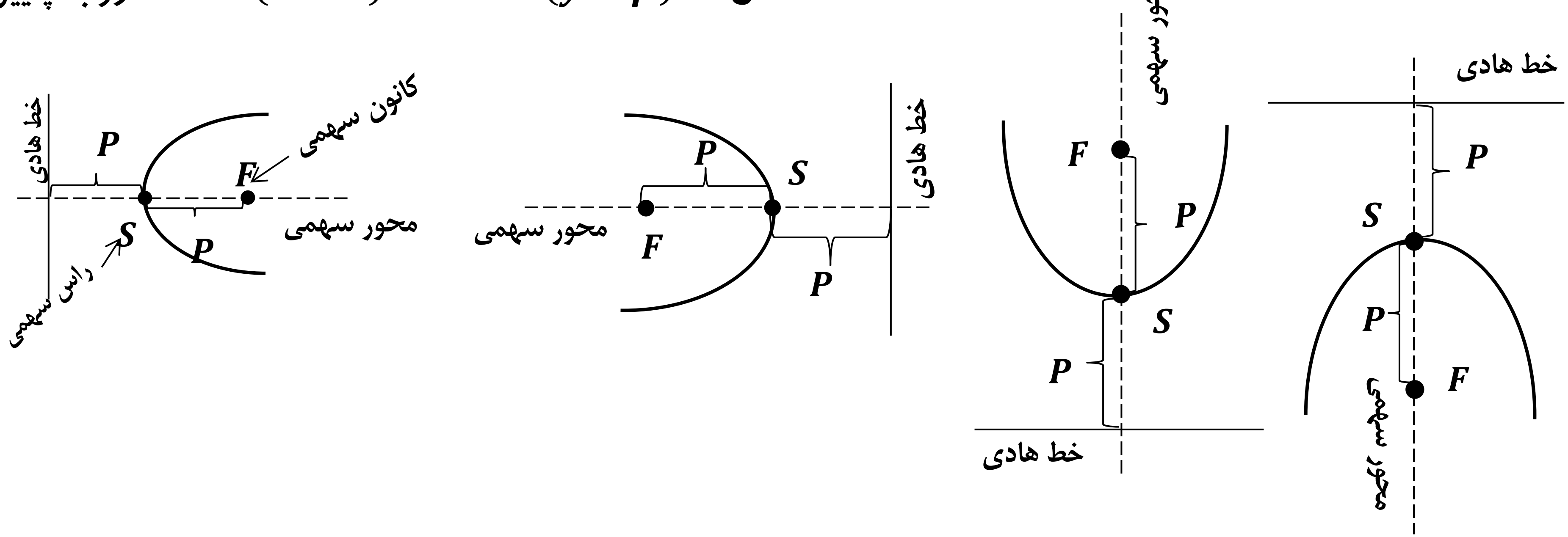
شکل الف $(y-\beta)^۲ = ۴P(x-\alpha)$: دهانه رو به راست

شکل ب $(y-\beta)^۲ = -۴P(x-\alpha)$: دهانه رو به چپ

الف) سهمی قائم: سهمی را قائم گوییم هرگاه محور سهمی موازی محور y ها باشد. معادله ی سهمی قائم اگر مختصات راس سهمی $S(\alpha,\beta)$ و فاصله ی کانونی عدد مثبت P باشد، به یکی از حالات زیر است:

شکل ج $\quad (x-\alpha)^{۲} = ۴P(y-\beta)$: دهانه رو به بالا

شکل د $\quad (x-\alpha)^{۲} = -۴P(y-\beta)$: دهانه رو به پایین



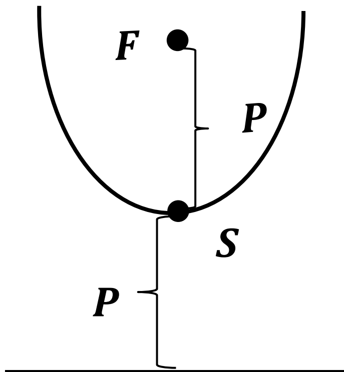
تذکر۱ : اگر در معادله ی سهمی، x از درجه ی دوم باشد، سهمی قائم و اگر y از درجه ی دوم باشد، سهمی افقی است.
به عنوان مثال، معادله ی $(x-۱)^{۲} = y+۱$ ، بیانگر یک سهمی قائم و معادله ی $(y+۲)^{۲} = ۴x$ بیانگر یک سهمی افقی است.

تذکر ۲: در معادله ی استاندارد سهمی، اگر ضریب پرانتزی که در آن متغیر از درجه اول می باشد، مثبت(یا منفی) باشد، دهانه ی سهمی به سمت جهت مثبت(یا منفی) محورها می باشد.

به عنوان مثال، در سهمی قائم به معادله ی $(x-۳)^۲=-۴(y+۲)$ ، چون ضریب پرانتز $(y+۲)$ که متغیر y آن از درجه ی اول است؛ منفی می باشد، نتیجه می گیریم که این سهمی قائم، رو به جهت منفی محور y ها (رو به پایین) قرار دارد و در سهمی افقی $(y-۱)^۲=۳(x+۲)$، چون ضریب پرانتز $(x+۲)$ مثبت است، پس دهانه ی این سهمی افقی، رو به جهت مثبت محور x ها)رو به راست) قرار دارد.

تذکر ۳: در سهمی افقی،راس سهمی (S) و کانون سهمی (F) دارای **عرض** یکسان $(y_S=y_F)$ و در سهمی قائم،راس سهمی (S) و کانون سهمی (F) دارای **طول** یکسان $(x_S=x_F)$ می باشند.

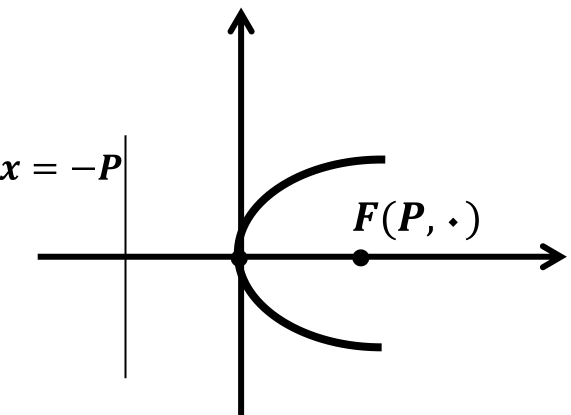
از این مطلب برای تشخیص افقی یا قائم بودن یک سهمی نیز استفاده می شود. به عنوان مثال، سهمی که مختصات راس آن $S(۲,۳)$ و مختصات کانون آن $F(۵,۳)$ باشد، یک سهمی افقی است. زیرا عرض های راس و کانون آن، با هم برابر است.



خط هادی

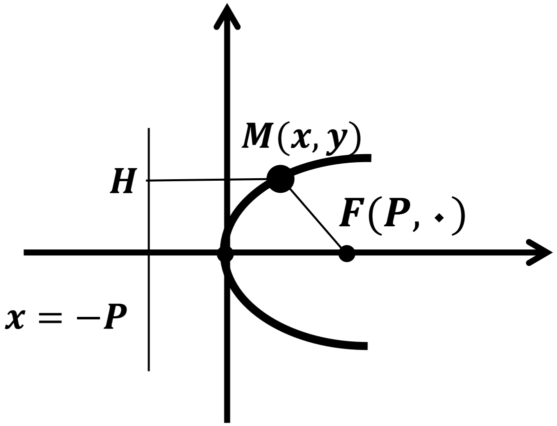
تذکر ۴: فاصله ی راس (S) تا کانون (F) برابر Pو فاصله ی راس (S) تا خط هادی نیز P می باشد. اما فاصله ی کانون تا خط هادی $۲P$ می باشد.

تذکر ۵: در سهمی افقی(قائم)، خط هادی موازی محور y ها(x ها) بوده و معادله ی آن به صورت $x=a$ $(y=b)$ می باشد.



مثال: با توجه به شکل مقابل، نشان دهید $y^۲=۴Px$ معادله ی سهمی است که راس آن واقع بر مبدا مختصات است و دهانه ی آن رو به راست باز می شود.

حل: بنابر تعریف سهمی، فاصله ی هر نقطه مانند $M(x,y)$ روی سهمی از کانون و خط هادی یکسان است.



بنابراین با توجه به شکل با فرض آن که مختصات کانون $F(P,۰)$ و معادله ی خط هادی $x=-P \Rightarrow x+P=۰$ باشد، داریم:

$$MF=\sqrt{(x_M-x_F)^۲+(y_M-y_F)^۲}=\sqrt{(x-P)^۲+(y-۰)^۲}$$

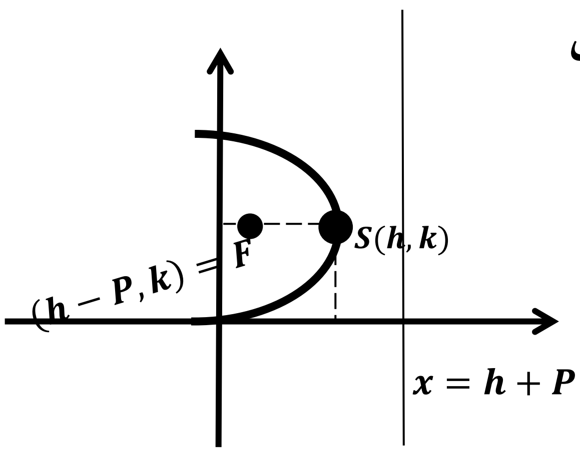
$$\Rightarrow MF=\sqrt{(x-P)^۲+y^۲}$$

$MH: x+P=۰$ فاصله نقطه M از خط $= \dfrac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\dfrac{|۱\times x+۰\times y+P|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=\dfrac{x+P}{۱}=x+P$

$$MF=MH\Rightarrow\sqrt{(x-P)^۲+y^۲}=x+P \xRightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\sqrt{(x-P)^۲+y^۲}\right)^۲=(x+P)^۲$$

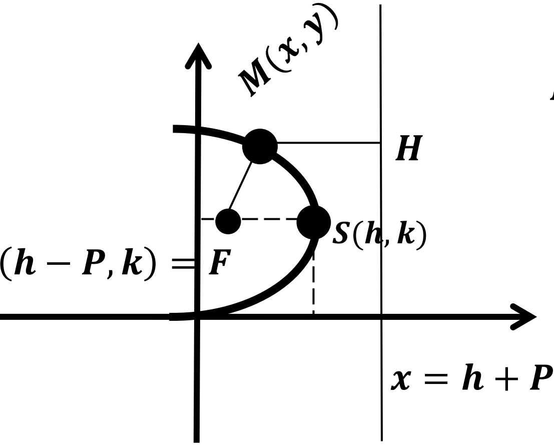
$$\Rightarrow (x-P)^۲+y^۲=(x+P)^۲\Rightarrow x^۲+P^۲-۲Px+y^۲=x^۲+P^۲+۲Px\Rightarrow y^۲=۴Px$$

مثال: با توجه به شکل مقابل، نشان دهید $(y-k)^۲=-۴P(x-h)$ معادله ی سهمی است که راس آن $S(h,k)$است و دهانه ی آن رو به چپ باز می شود.



حل: بنابر تعریف سهمی، فاصله ی هر نقطه مانند $M(x,y)$ روی سهمی از کانون و خط هادی یکسان است.

بنابراین با توجه به شکل با فرض آن که مختصات کانون $F(h-P,k)$ و معادله ی خط هادی $x=h+P\Rightarrow x-h-P=۰$ باشد، داریم:



$$MF=\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_M-y_F)^2}=\sqrt{\left(x-(h-P)\right)^2+(y-k)^2}$$

$$\Rightarrow MF=\sqrt{(x-h+P)^2+(y-k)^2}$$

$MH: x-h-P=0$ **فاصله نقطه M از خط** $=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|1\times x+0\times y-h-P|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\dfrac{x-h-P}{1}$
$=x-h-P$

$$MF=MH\Rightarrow\sqrt{(x-h+P)^2+(y-k)^2}=x-h-P\xRightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$\left(\sqrt{(x-h+P)^2+(y-k)^2}\right)^2=(x-h-P)^2\Rightarrow(x-h+P)^2+(y-k)^2=(x-h-P)^2$$

حال با استفاده از اتحاد $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ تساوی بالا را ساده می کنیم.

$$x^2+(-h)^2+P^2+2x(-h)+2xP+2(-h)P+y^2+k^2-2yk=x^2+(-h)^2+(-P)^2$$
$$+2x(-h)+2x(-P)+2(-h)(-P)\Rightarrow x^2+h^2+P^2-2xh+2xP-2hP+y^2+k^2-2yk=$$
$$x^2+h^2+P^2-2xh-2xP+2hP$$

$$\xRightarrow{\text{پس از ساده کردن}}y^2+k^2-2yk=-2xP+2hP-2xP+2hP\Rightarrow y^2+k^2-2yk=-4xP+4hP$$

$$\Rightarrow(y-k)^2=-4P(x-h)$$

معادله ی گسترده ی سهمی:

هر معادله به صورت $Ay^{۲} + Bx + Cy + D = ۰$ یا $Ax^{۲} + By + Cx + D = ۰$ با شرط $A \neq ۰$ و $C \neq ۰$ معادله ی گسترده ی یک سهمی می باشد.

از طرفی می دانیم در سهمی افقی، y از درجه ی دوم و در سهمی قائم، x از درجه ی دوم است. بنابراین نتیجه می گیریم که معادله ی $Ay^{۲} + Bx + Cy + D = ۰$ بیانگر یک سهمی افقی و معادله ی $Ax^{۲} + By + Cx + D = ۰$ بیانگر یک سهمی قائم است.

برای یافتن مشخصات یک سهمی اعم از راس، کانون و ... باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد تبدیل کنیم. برای این منظور از اتحاد مربع دو جمله ای و شیوه ی مربع کامل کردن استفاده می کنیم.

مثال: معادله ی گسترده ی $x^{۲} + ۸x + ۴y = ۰$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.

حل:

$$x^{۲} + ۸x + ۴y = ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۸x = -۴y \xRightarrow[\left(\frac{۸}{۲}\right)^{۲} = ۴^{۲} = ۱۶]{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } x \text{ به توان دو}} x^{۲} + ۸x + ۱۶ - ۱۶ = -۴y$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۸x + ۱۶ = -۴y + ۱۶ \Rightarrow (x + ۴)^{۲} = -۴(y - ۴)$$

کانون، راس و خط هادی سهمی:

الف) مختصات راس سهمی: در معادله ی استاندارد سهمی، برای به دست آوردن مختصات راس سهمی، هر دو پرانتز شامل x و y را مساوی صفر قرار می دهیم. ریشه های به دست آمده طول و عرض راس سهمی می باشد.

$(x - \alpha)^{۲} = ۴P(y - \beta) \Rightarrow$ مختصات راس سهمی: $S(\alpha, \beta)$

$x - \alpha = ۰ \Rightarrow x = \alpha$ $y - \beta = ۰ \Rightarrow y = \beta$

$(y - \beta)^{۲} = ۴P(x - \alpha) \Rightarrow$ مختصات راس سهمی: $S(\alpha, \beta)$

$x - \alpha = ۰ \Rightarrow x = \alpha$ $y - \beta = ۰ \Rightarrow y = \beta$

مثال: در سهمی به معادله ی $(y+۳)^۲ = ۴(x+۲)$ مختصات راس سهمی عبارت است از:

$$\begin{cases} y+۳=۰ \Rightarrow y=-۳ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases} \Rightarrow S(-۲,-۳)$$

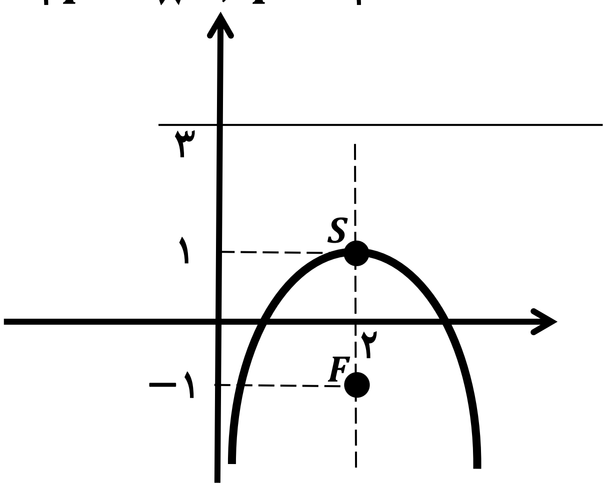
ب) مختصات کانون و معادله ی خط هادی سهمی: برای به دست آوردن مختصات کانون و معادله ی خط هادی در یک سهمی افقی یا قائم، از شکل تقریبی سهمی استفاده می کنیم و به کمک آن تمام ویژگی های سهمی را به دست می آوریم.

مثال: مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی های زیر را به دست آورید.

الف) $۸y = ۴ + ۴x - x^۲ \xrightarrow[\left(\frac{۴}{۲}\right)^۲ = ۲^۲ = ۴]{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } x \text{ به توان دو}} ۸y = ۴ + ۴x - x^۲ + ۴ - ۴ \Rightarrow ۸y = -x^۲ + ۴x - ۴ + ۸$

$$\Rightarrow ۸y - ۸ = -(x^۲ - ۴x + ۴) \Rightarrow -(x-۲)^۲ = ۸(y-۱) \Rightarrow (x-۲)^۲ = -۸(y-۱) \Rightarrow S(۲,۱)$$

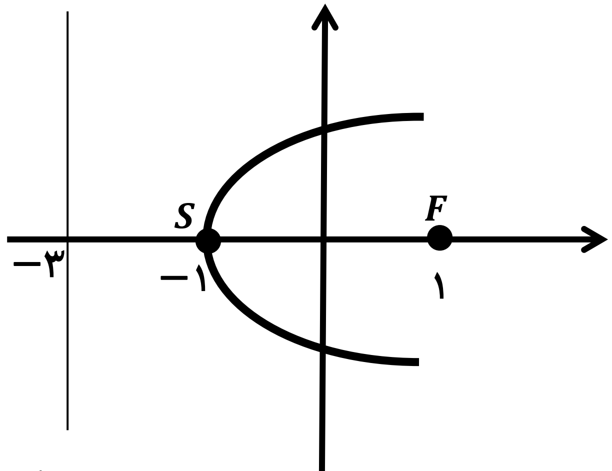
$$۴P = ۸ \Rightarrow P = ۲$$



با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی قائم و دهانه ی آن رو به پایین می باشد. حال برای محاسبه ی مختصات کانون و معادله ی خط هادی، شکل تقریبی آن را رسم می کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کانون ۲ واحد پایین تر از راس} \Rightarrow F(۲,-۱) \\ \text{خط هادی ۲ واحد بالاتر از راس} \Rightarrow \text{معادله ی خط هادی}: y = ۳ \end{cases}$$

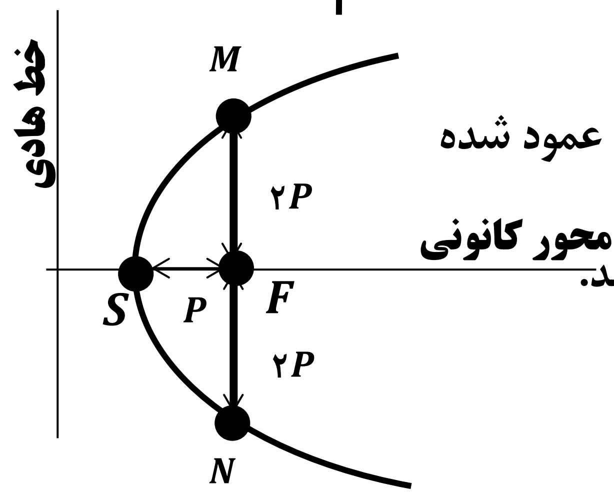
ب) $y^{۲} - ۸x - ۸ = ۰ \quad \Rightarrow y^{۲} = ۸x + ۸ \Rightarrow y^{۲} = ۸(x + ۱) \quad \Rightarrow S(-۱, ۰) \qquad ۴P = ۸ \Rightarrow P = ۲$



با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی افقی و دهانه ی آن رو به سمت راست می باشد. حال برای محاسبه ی مختصات کانون و معادله ی خط هادی، شکل تقریبی آن را رسم می کنیم.

$\Rightarrow \begin{cases} \text{کانون ۲ واحد جلو تر از راس} \Rightarrow F(۱,۰) \\ \text{خط هادی ۲ واحد عقب تر از راس} \Rightarrow \text{معادله ی خط هادی}: y = -۳ \end{cases}$

وتر کانونی سهمی:

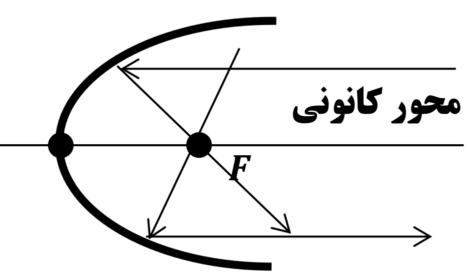


سهمی مقابل را در نظر بگیرید. پاره خطی را که در کانون بر محور کانونی سهمی عمود شده و سهمی را در نقاط M و N قطع کرده است، وتر کانونی سهمی نام دارد.

طول پاره خط MN (وتر کانونی)، برابر $۴P$ (چهار برابر فاصله ی کانونی) می باشد.

مطابق شکل، محور کانونی عمود منصف وتر کانونی (پاره خط MN) می باشد.

ویژگی بازتابندگی سهمی ها:



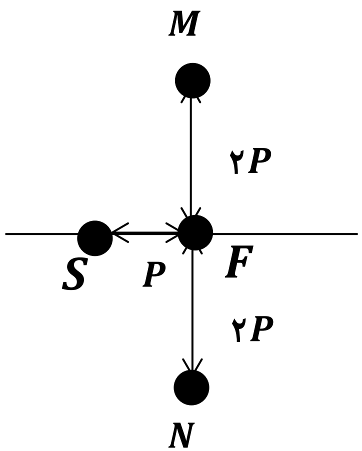
در یک سهمی، اگر پرتویی از کانون (F) به سهمی برخورد کند، موازی با محور سهمی خارج می شود و برعکس. یعنی اگر پرتویی موازی با محور سهمی به آن برخورد کند، از کانون سهمی عبور می کند. این ویژگی را ویژگی بازتابندگی سهمی می گوییم. این ویژگی، سبب شده است که سهمی کاربرد وسیعی در صنعت داشته باشد.

رسم سهمی:

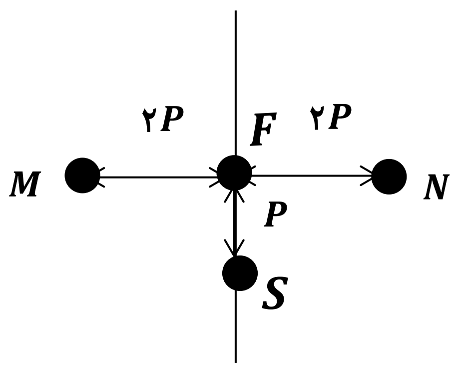
برای رسم یک سهمی مراحل زیر را طی می کنیم:

۱) ابتدا معادله ی سهمی را اگر به صورت گسترده باشد، به فرم استاندارد تبدیل کرده و سپس با توجه به آن، نوع سهمی (افقی یا قائم)، نقاط راس و کانون و خط هادی سهمی را می یابیم.

۲) نقاط به دست آمده و خط هادی و محور کانونی را در صفحه ی مختصات رسم می کنیم.



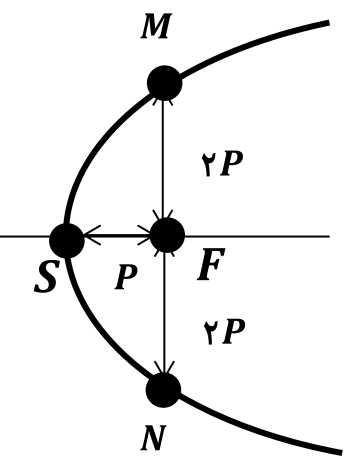
سهمی افقی



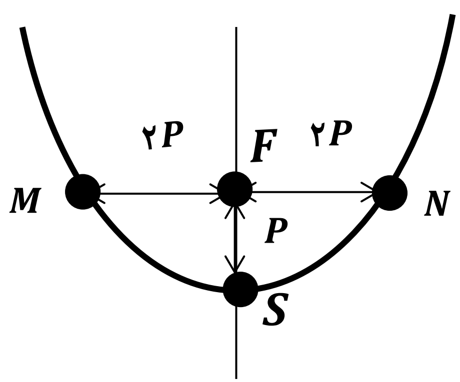
سهمی قائم

۳) با توجه به نوع سهمی (افقی یا قائم)، از نقطه ی کانونی (F) به اندازه ی $۲P$ واحد به سمت بالا و پایین(برای سهمی افقی) یا به سمت چپ و راست (برای سهمی قائم) جدا کرده، آن ها را M و N می نامیم.

در حقیقت با این کار وتر کانونی سهمی را رسم می کنیم که برابر پاره خط MN می شود و بر محور تقارن سهمی عمود است.



سهمی افقی



سهمی قائم

۴) در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را به دست می آوریم.

۵) در نهایت نقاط به دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل می کنیم.

مثال: نمودار سهمی $y^{2}+4y+4x=0$ را رسم کنید.

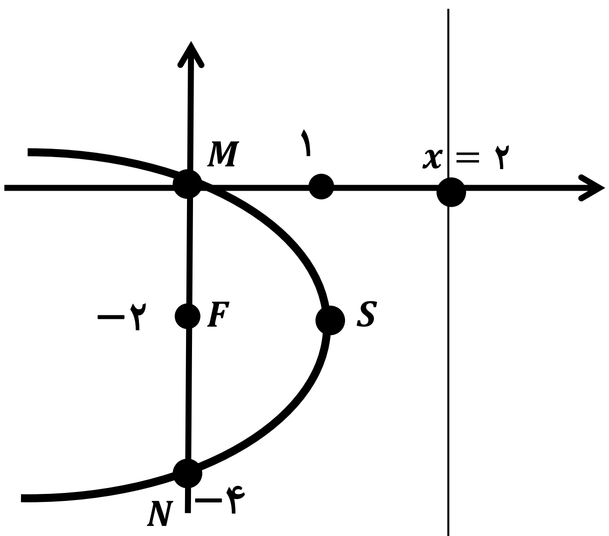
حل: ابتدا معادله ی داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

$$y^{2}+4y+4x=0 \xRightarrow[\left(\frac{4}{2}\right)^{2}=2^{2}=4]{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } y \text{ به توان دو}} y^{2}+4y+4x+4-4=0 \Rightarrow y^{2}+4y+4+4x-4=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y^{2}+4y+4}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}=\underbrace{-4x+4}_{\text{فاکتورگیری از } -4} \Rightarrow (y+2)^{2}=-4(x-1) \Rightarrow \begin{cases} S(1,-2) \\ 4P=4 \Rightarrow P=1 \end{cases}$$

با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی افقی و دهانه ی آن به سمت چپ می باشد. هم چنین نقطه ی $(0,2)$ کانون سهمی و $x=2$ خط هادی سهمی می باشد.

حال نقاط راس، کانون و خط هادی را در صفحه ی مختصات مشخص می کنیم و سپس از نقطه ی F به اندازه ی $2P$ واحد به سمت بالا و پایین رفته و آن را M و N می نامیم. سپس محل برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست می آوریم.



$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow (0+2)^{2}=-4(x-1) : \text{محل برخورد سهمی با محور } x \text{ ها} \\ \Rightarrow 4=-4(x-1) \Rightarrow x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow (y+2)^{2}=-4(0-1) : \text{محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها} \\ \Rightarrow (y+2)^{2}=4 \Rightarrow y+2=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y=2-2=0 \\ y=-2-2=-4 \end{cases} \end{cases}$$

مثال: نمودار سهمی $x^{۲} + ۸x + ۸y = ۰$ را رسم کنید.

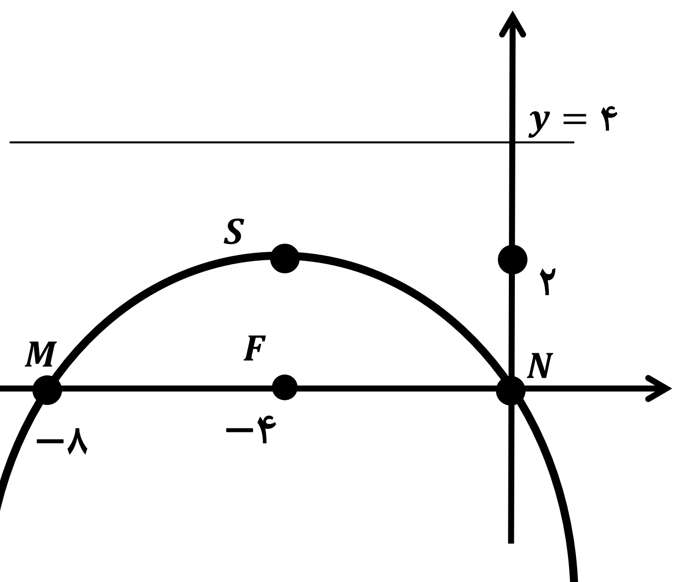
حل: ابتدا معادله ی داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

$$x^{۲} + ۸x + ۸y = ۰ \xRightarrow[\left(\frac{۸}{۲}\right)^{۲} = ۴^{۲} = ۱۶]{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } x \text{ به توان دو}} x^{۲} + ۸x + ۸y + ۱۶ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۸x + ۱۶ + ۸y - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^{۲} + ۸x + ۱۶}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} = \underbrace{-۸y + ۱۶}_{\text{فاکتورگیری از } -۸} \Rightarrow (x+۴)^{۲} = -۸(y-۲) \quad \Rightarrow \begin{cases} S(-۴, ۲) \\ ۴P = ۸ \Rightarrow P = ۲ \end{cases}$$

با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی قائم و دهانه ی آن به سمت پایین می باشد. هم چنین نقطه ی $(-۴,۰)$ کانون سهمی و $y = ۴$ خط هادی سهمی می باشد.

حال نقاط راس، کانون و خط هادی را در صفحه ی مختصات مشخص می کنیم و سپس از نقطه ی F به اندازه ی $۲P$ واحد به سمت چپ و راست رفته و آن را M و N می نامیم. سپس محل برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست می آوریم.

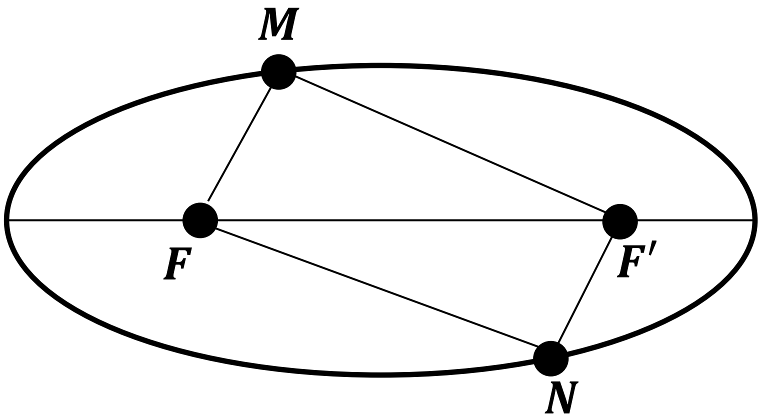


$$\begin{cases} \text{محل برخورد سهمی با محور } x \text{ ها} : y = ۰ \Rightarrow (x+۴)^{۲} = -۸(۰-۲) \\ \Rightarrow (x+۴)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x + ۴ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = +۴ - ۴ = ۰ \\ x = -۴ - ۴ = -۸ \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها} : x = ۰ \Rightarrow (۰+۴)^{۲} = -۸(y-۲) \\ \Rightarrow -۸(y-۲) = ۱۶ \Rightarrow y - ۲ = -۲ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

بیضی: $(Ellipse)$

مجموعه ی نقاطی از صفحه ی مختصات به طوری که مجموع فاصله ی هر نقطه از دو نقطه ی ثابت، مقدار ثابتی باشد، یک بیضی را مشخص می کند.



دو نقطه ی ثابت را **کانون های بیضی** می نامیم و آن ها را با F و F' نمایش می دهیم. هم چنین مقدار ثابت را ۲a نامیده و داریم:

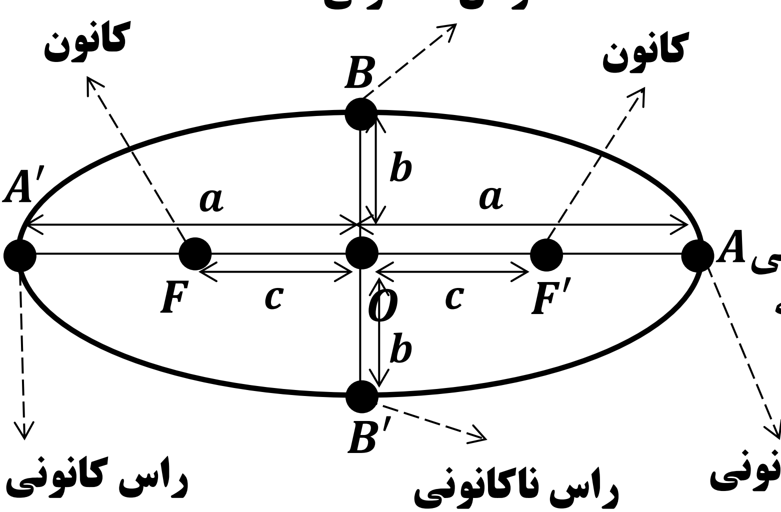
$$MF + MF' = NF + NF' = \cdots = ۲a$$

اصطلاحات مهم در بیضی:

۱) محور کانونی بیضی: کانون های بیضی در امتداد یک خط قرار دارند. این خط محور کانونی بیضی نام دارد.

۲) فاصله ی کانونی: فاصله ی بین دو کانون بیضی را فاصله ی کانونی بیضی نامیده و آن را با ۲c نمایش می دهیم.

۳) مرکز بیضی: وسط پاره خطی که دو کانون بیضی را به هم وصل می کند مرکز بیضی می باشد که فاصله ی آن از هر یک از کانون ها برابر c می باشد.



۴) راس های کانونی: نقاط محل برخورد محور کانونی بیضی با بیضی، یعنی نقاط A و A' در شکل زیر، راس های کانونی بیضی می باشند که طول AA' یعنی قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.

۵) راس های ناکانونی: در شکل مقابل، پاره خط BB' که از مرکز بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است، قطر کوچک بیضی می باشد که اندازه ی آن را با ۲b نمایش می دهیم. نقاط B و B' را رئوس ناکانونی بیضی می گوییم.

توجه: مرکز بیضی، وسط فاصله ی کانونی، وسط قطر بزرگ و وسط قطر کوچک بیضی می باشد.

تذکر: در هر بیضی، اندازه پارامتر a از پارامترهای b و c بیش تر است و رابطه ی زیر بین آن ها برقرار است:

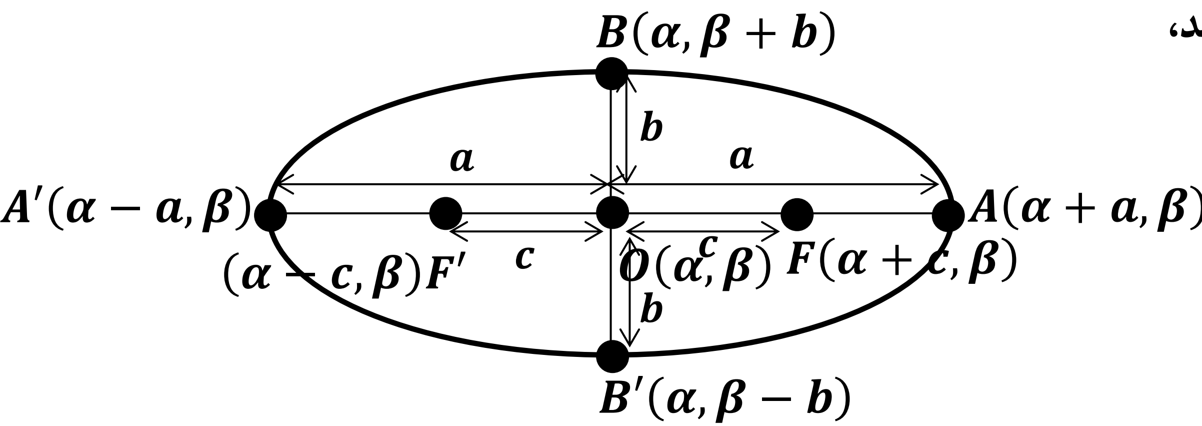
$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

بیضی افقی و قائم و معادله ی آن ها:

الف) بیضی افقی: اگر محور کانونی یک بیضی، موازی محور x ها باشد، بیضی را افقی می گوییم.

معادله ی بیضی افقی:

معادله ی بیضی افقی که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$، فاصله ی کانونی آن $۲c$،
قطر بزرگ آن $۲a$ و قطر کوچک آن $۲b$ باشد،
به صورت زیر است:

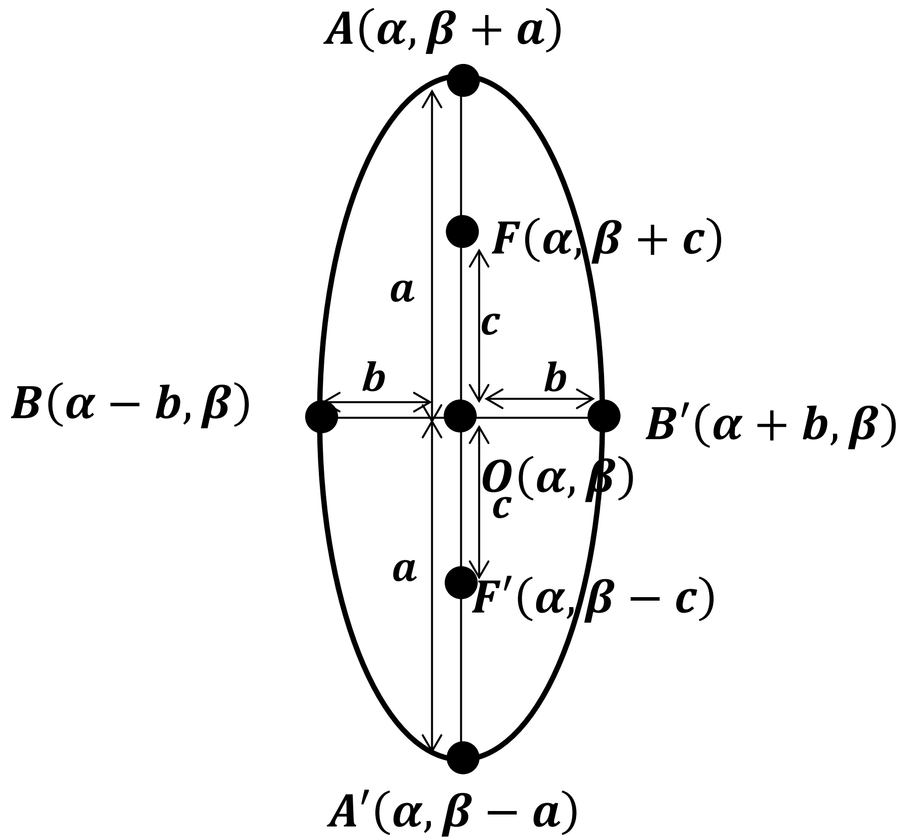


$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱}$$

الف) بیضی قائم: اگر محور کانونی یک بیضی، موازی محور y ها باشد، بیضی را قائم می گوییم.

معادله ی بیضی قائم:

معادله ی بیضی افقی که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$، فاصله ی کانونی آن $۲c$، قطر بزرگ آن $۲a$ و قطر کوچک آن $۲b$ باشد،
به صورت زیر است:



$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} = ۱}$$

روش تشخیص بیضی های قائم و افقی:

۱) در معادله ی بیضی افقی، عدد بزرگ تر $(a^۲)$ در مخرج $(x-\alpha)^۲$ قرار دارد و در بیضی قائم عدد بزرگ تر $(a^۲)$ در مخرج $(y-\beta)^۲$ قرار دارد.

۲) در بیضی افقی رئوس کانونی (A, A') ، کانون ها (F, F') و مرکز بیضی $(O(\alpha, \beta))$ همگی روی محور کانونی بیضی که خطی افقی می باشد، قرار دارند. بنابراین عرض تمام این نقاط با هم برابر است. در حالی که در بیضی قائم، محور کانونی خطی قائم است. در نتیجه نقاط ذکر شده در بالا، نقاطی هم طول هستند.

مثال: معادله ی بیضی قائمی که مرکزش $O(۵,-۳)$ و طول قطر بزرگش ۴ و طول قطر کوچکش ۲ باشد را بنویسید.

حل: می دانیم‌طول قطر بزرگ یعنی AA' برابر $۲a$ و طول قطر کوچک یعنی BB' برابر $۲b$ است. پس:

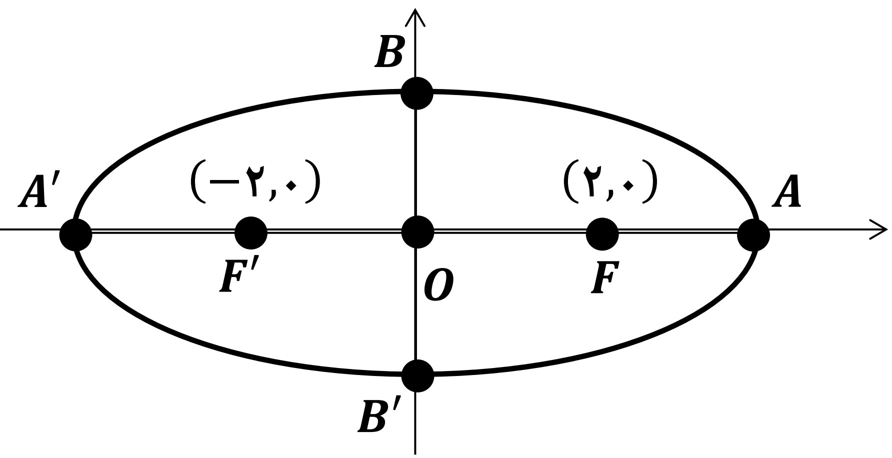
$$AA' = ۴ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

هم چنین می دانیم معادله ی بیضی قائم به مرکز $O(\alpha,\beta)$ به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} = ۱ \xrightarrow[a=۲,b=۱]{O(۵,-۳)} \frac{(x-۵)^۲}{۱^۲} + \frac{\left(y-(-۳)\right)^۲}{۲^۲} = ۱ \Rightarrow (x-۵)^۲ + \frac{(y+۳)^۲}{۴} = ۱$$

مثال: معادله ی بیضی را بنویسید که نقاط $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ کانون های آن باشند و طول قطر کوچکش برابر ۸ باشد.

حل: کانون های $F(۲,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ هم عرض هستند، یعنی روی یک خط افقی قرار دارند و در نتیجه محور کانونی موازی محور x ها است. پس بیضی افقی است.



از طرفی داریم:

$$FF' = ۲c \Rightarrow \sqrt{(x_F - x_{F'})^۲ + (y_F - y_{F'})^۲} = ۲c$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(۲-(-۲)\right)^۲ + (۰-۰)^۲} = ۲c \Rightarrow \sqrt{۴^۲} = ۲c$$

$$\Rightarrow ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲$$

طول قطر کوچک : $BB' = ۲b \Rightarrow ۸ = ۲b \Rightarrow b = ۴$

اما همواره داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow a = \sqrt{۲۰}$$

از طرف دیگر مرکز بیضی (نقطه ی O) وسط پاره خط FF' است. پس:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_F + x_{F'}}{۲} = \dfrac{۲ - ۲}{۲} = ۰ \\ y_O = \dfrac{y_F + y_{F'}}{۲} = \dfrac{۰ + ۰}{۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات مرکز : } O(۰,۰)$$

$$\xRightarrow{\text{معادله ی بیضی افقی}} \frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(x-۰)^۲}{\left(\sqrt{۲۰}\right)^۲} + \frac{(y-۰)^۲}{۴^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲۰} + \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

معادله ی گسترده ی بیضی:

معادله ی $ax^۲ + by^۲ + cx + dy + e = ۰$ در صورتی که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ اعدادی مخالف صفر، متمایز و هم علامت باشند، می تواند معادله ی یک بیضی باشد.

در این صورت برای یافتن مرکز بیضی و پارامترهای آن و یا برای رسم بیضی، باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد تبدیل کنیم.

به عنوان مثال معادله ی $۹x^۲ + ۴y^۲ + ۱۸x - ۱۶y - ۱۱ = ۰$ معادله ی یک بیضی است. برای آن که آن را به فرم استاندارد $\dfrac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} + \dfrac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱$ تبدیل کنیم، باید عبارت مربع کامل $(x-\alpha)^۲$ و $(y-\beta)^۲$ را ایجاد کنیم.

برای این منظور از اتحاد مربع دو جمله ای و روش مربع کامل کردن استفاده می کنیم.

مثال: **فرم استاندارد بیضی $۹x^۲ + ۴y^۲ + ۱۸x - ۱۶y - ۱۱ = ۰$ را بنویسید.**

حل:

$$\xRightarrow[\text{و جملات شامل } y \text{ را نیز کنار هم قرار می دهیم.}]{\text{جملات شامل } x \text{ را کنار هم}} \left(۹x^۲ + ۱۸x\right) + \left(۴y^۲ - ۱۶y\right) = ۱۱ \xRightarrow{\text{فاکتورگیری از ضرایب } x^2 \text{ و } y^2 \text{ در هر پرانتز}}$$

$$۹(x^۲+۲x)+۴(y^۲-۴y)=۱۱ \xrightarrow[\text{مربع کامل می کنیم}]{\text{هر یک پرانتزها را}} ۹(x^۲+۲x+۱-۱)+۴(y^۲-۴y+۴-۴)=۱۱$$

$$\Rightarrow ۹(x^۲+۲x+۱)-۹+۴(y^۲-۴y+۴)-۱۶=۱۱ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۹(x+۱)^۲+۴(y-۲)^۲-۲۵=۱۱$$

$$\Rightarrow ۹(x+۱)^۲+۴(y-۲)^۲=۲۵+۱۱=۳۶ \Rightarrow ۹(x+۱)^۲+۴(y-۲)^۲=۳۶ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۳۶}}$$

$$\frac{۹(x+۱)^۲+۴(y-۲)^۲}{۳۶}=\frac{۳۶}{۳۶} \Rightarrow \frac{۹(x+۱)^۲}{۳۶}+\frac{۴(y-۲)^۲}{۳۶}=۱ \Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{(y-۲)^۲}{۹}=۱$$

پس این معادله مربوط به یک بیضی قائم است(زیرا عدد بزرگ تر در مخرج $(y-۲)^۲$ قرار دارد).

مختصات مرکز بیضی $O(-۱,۲)$ و $a=\sqrt{۴}=۲$ و $b=\sqrt{۹}=۳$ می باشد.

نکته: مانند آن چه در بخش دایره گفتیم، اگر $ax^۲+by^۲+cx+dy+e=۰$ معادله ی یک بیضی باشد، نامعادله ی $ax^۲+by^۲+cx+dy+e<۰$ مجموعه نقاط داخل بیضی و نامعادله ی $ax^۲+by^۲+cx+dy+e>۰$ مجموعه نقاط خارج بیضی می باشد.

مثال: معادله ی یک بیضی به صورت زیر داده شده است. مرکز، راس های A و A' و کانون های بیضی را بیابید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$۹x^۲+۴y^۲+۱۸x-۸y-۲۳=۰$$

حل:

$$\xrightarrow[\text{و جملات شامل } y \text{ را نیز کنار هم قرار می دهیم.}]{\text{جملات شامل } x \text{ را کنار هم}} (۹x^۲+۱۸x)+(۴y^۲-۸y)=۲۳ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از ضرایب } y^2 \text{ و } x^2 \text{ در هر پرانتز}}$$

$$۹(x^۲+۲x)+۴(y^۲-۲y)=۲۳ \xrightarrow[\text{مربع کامل می کنیم}]{\text{هر یک پرانتزها را}} ۹(x^۲+۲x+۱-۱)+۴(y^۲-۲y+۱-۱)=۲۳$$

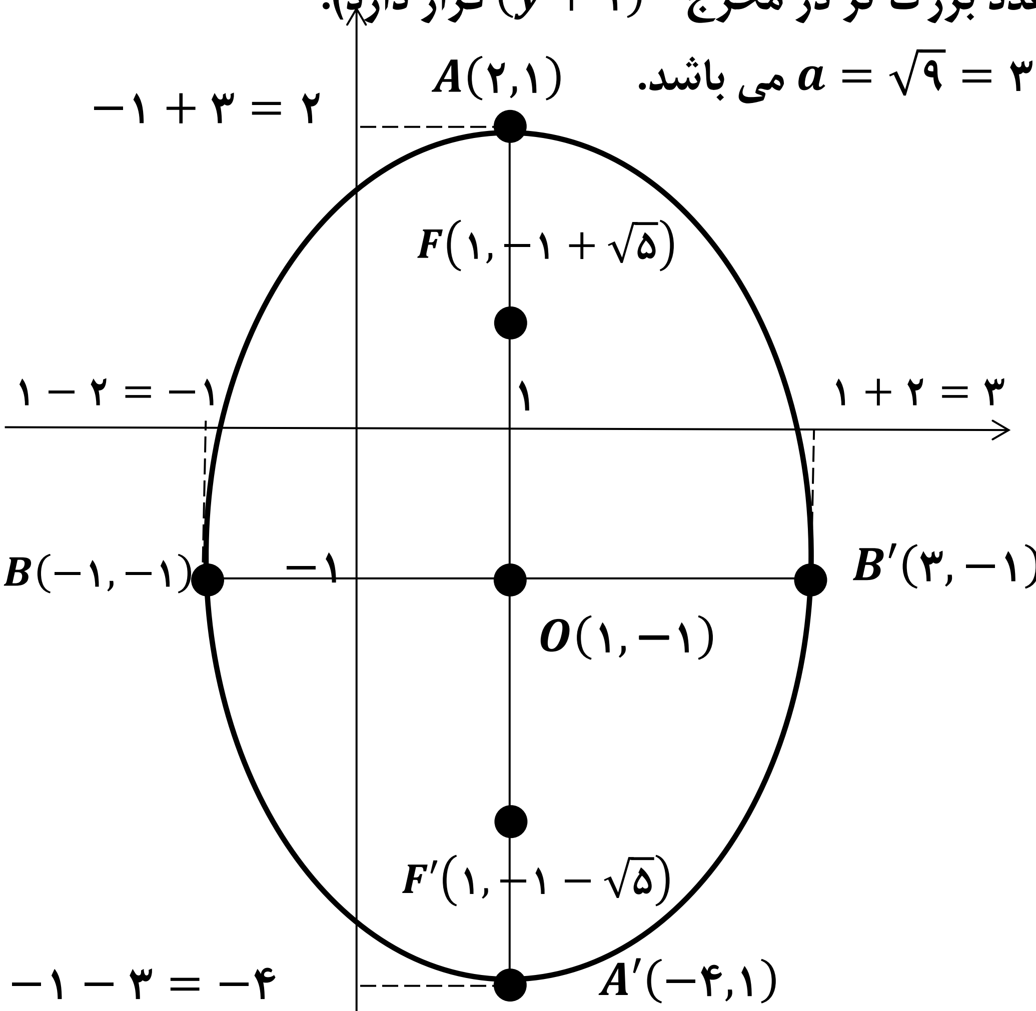
$$\Rightarrow ۹\left(x^{۲}-۲x+۱\right)-۹+۴\left(y^{۲}+۲y+۱\right)-۴=۲۳\xrightarrow{\text{تجزیه}}۹(x-۱)^{۲}+۴(y+۱)^{۲}-۱۳=۲۳$$

$$\Rightarrow ۹(x-۱)^{۲}+۴(y+۱)^{۲}=۲۳+۱۳=۳۶\Rightarrow ۹(x-۱)^{۲}+۴(y+۱)^{۲}=۳۶\ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۳۶}}$$

$$\frac{۹(x-۱)^{۲}+۴(y+۱)^{۲}}{۳۶}=\frac{۳۶}{۳۶}\Rightarrow\frac{۹(x-۱)^{۲}}{۳۶}+\frac{۴(y+۱)^{۲}}{۳۶}=۱\Rightarrow\frac{(x-۱)^{۲}}{۴}+\frac{(y+۱)^{۲}}{۹}=۱$$

پس این معادله مربوط به یک بیضی قائم است(زیرا عدد بزرگ تر در مخرج $(y+۱)^{۲}$ قرار دارد).

مختصات مرکز بیضی $O(۱,-۱)$ و $b=\sqrt{۴}=۲$ و $a=\sqrt{۹}=۳$ می باشد.



$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow ۳^{۲}=۲^{۲}+c^{۲}$$
$$\Rightarrow c^{۲}=۹-۴=۵$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

خروج از مرکز بیضی:

میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را با معیاری به نام خروج از مرکز بیضی نشان می دهیم که در بیضی با پارامترهای a و b و c از فرمول زیر به دست می آید:

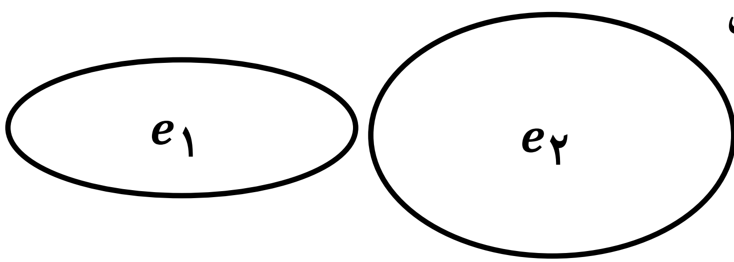
$$e = \frac{c}{a}$$

قبلا گفتیم که همواره در بیضی رابطه ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است، پس همواره $a > c$ می باشد و در نتیجه $e = \frac{c}{a}$ همواره عددی مثبت و کوچک تر از یک $(۰ < e < ۱)$ است . هم چنین داریم:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{a^۲ - b^۲} \overset{\div a}{\Rightarrow} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a} \xRightarrow{\frac{c}{a}=e, a=\sqrt{a^۲}} e = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{\sqrt{a^۲}} = \sqrt{\frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$$

هر چه e به صفر نزدیک باشد، شکل بیضی به شکل دایره متمایل است
و هر چه e به عدد یک نزدیک تر باشد، شکل
بیضی کشیده تر می شود و از شکل دایره دور می شود.



$$\Rightarrow e_۱ > e_۲$$

مثال: خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۴}{۵}$،مرکزش $(-۱, -۴)$ و طول نقطه ی A راس کانونی آن برابر یک است. و قطر بزرگ بیضی موازی محور x ها است. معادله ی بیضی را به دست آورید.

حل: چون قطر بزرگ بیضی موازی محور x هاست پس بیضی افقی می باشد و چون $(-۱, -۴)$ مرکز بیضی است پس معادله ی آن به صورت زیر است

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{(x+۴)^۲}{a^۲}+\frac{(y+۱)^۲}{b^۲}=۱$$

حال باید مقادیر a و b را بیابیم.

چون بیضی افقی است پس عرض راس کانونی و عرض کانون بیضی با هم برابر است و داریم:

$$O(-۴,-۱)\xRightarrow{\text{بیضی افقی}}A(-۴\pm a,-۱)\xRightarrow{x_A=۱}-۴\pm a=۱\Rightarrow\begin{cases}a=۱+۴=۵\\ a=-۱-۴=-۵\ (\text{چون } a>۰\text{؛ غ.ق.ق})\end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$e=\frac{c}{a}\xRightarrow{e=\frac{۴}{۵},a=۵}\frac{۴}{۵}=\frac{c}{۵}\Rightarrow c=۴$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۵^۲=b^۲+۴^۲\Rightarrow b^۲=۲۵-۱۶=۹\Rightarrow b=\sqrt{۹}=۳$$

$$\Rightarrow\ \frac{(x+۴)^۲}{۵^۲}+\frac{(y+۱)^۲}{۳^۲}=۱\quad\Rightarrow\frac{(x+۴)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

معادله ی پارامتری بیضی: اگر در معادله ی بیضی، مختصات x و y بر حسب پارامتری مانند t باشد، برای آن که معادله استاندارد بیضی را به دست آوریم، کافی است پارامتر t را بین x و y حذف کنیم.

مثال: نقطه ی $M\left|\begin{array}{l}x=۱+۳sint\\ y=۲cost\end{array}\right.$ مفروض است. نشان دهید نقطه ی M روی یک بیضی قرار دارد.

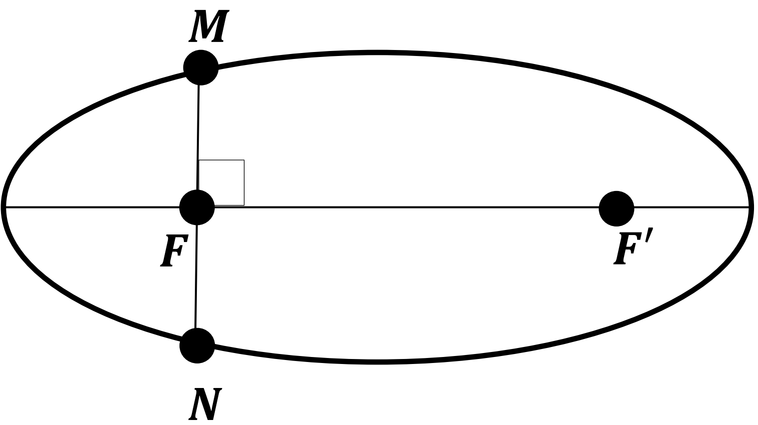
حل: می دانیم $sin^۲\theta+cos^۲\theta=۱$. پس $sint$ و $cost$ را بر حسب x و y یافته و در این رابطه قرار می دهیم.

$$\begin{cases}x=۱+۳sint\Rightarrow sint=\dfrac{x-۱}{۳}\\ y=۲cost\Rightarrow cost=\dfrac{y}{۲}\end{cases}\xRightarrow{sin^۲\theta+cos^۲\theta=۱}\left(\frac{x-۱}{۳}\right)^۲+\left(\frac{y}{۲}\right)^۲=۱\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$$

معادله ی به دست آمده، معادله ی یک بیضی افقی به مرکز $(۱,۰)$ است.

وتر کانونی بیضی:

پاره خطی که هر دو نقطه ی متمایز از بیضی را به هم وصل می کند، وتر بیضی نامیده می شود.
اما وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است (MN) را **وتر کانونی بیضی** می نامیم.
وتر کانونی در واقع کوتاه ترین وتری است که از کانون می گذرد.



طول وتر کانونی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$MN = \frac{۲b^۲}{a}$$

معادلات خطوط مماس و قائم بر بیضی:

برای نوشتن معادله ی خط مماس بر بیضی در نقطه ی $(x_۰, y_۰)$ واقع بر آن، مانند منحنی های دیگر، شیب خط مماس برابر است با مشتق منحنی در نقطه ی تماس. بنابراین برای یافتن شیب خط مماس بر بیضی، از معادله ی بیضی که معادله ی ضمنی از x و y است، نسبت به x مشتق ضمنی می گیریم.
سپس در فرمول به دست آمده برای y'، قرار می دهیم: $x = x_۰$ و $y = y_۰$ تا شیب خط مماس به دست آید.
برای به دست آوردن شیب خط قائم بر بیضی در این نقطه، شیب خط مماس را قرینه و معکوس می کنیم.

مثال: در بیضی $x^۲ + ۲y^۲ - ۲x - ۸y + ۷ = ۰$ معادله ی خطوط مماس بر بیضی را در نقاط به طول $x = ۱$ واقع بر آن به دست آورید.

حل: ابتدا با قرار دادن $x = ۱$ در معادله ی بیضی، عرض نقطه ی تماس را به دست می آوریم:

$$۱^۲ + ۲y^۲ - ۲(۱) - ۸y + ۷ = ۰ \Rightarrow ۲y^۲ - ۸y + ۶ = ۰ \overset{\div ۲}{\Rightarrow} y^۲ - ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۱ \\ y = ۳ \end{cases}$$

بنابراین باید معادله ی خطوط مماس ر ادر دو نقطه ی $T(۱,۱)$ و $T'(۱,۳)$ به دست آوریم.

برای یافتن شیب خطوط مماس از معادله ی بیضی مشتق ضمنی بگیریم.

$$x^۲+۲y^۲-۲x-۸y+۷=۰ \Rightarrow f'(x,y)=-\frac{۲x-۲}{۴y-۸}=-\frac{x-۱}{۲y-۴} \Rightarrow \begin{cases} f'(۱,۱)=-\dfrac{۱-۱}{۲(۱)-۴}=۰ \\ f'(۱,۳)=-\dfrac{۱-۱}{۲(۳)-۴}=۰ \end{cases}$$

در هر دو نقطه، شیب خط مماس بر بیضی، صفر است. پس معادله ی این خطوط مماس به صورت $y=k$ است.

بنابراین معادله ی خط مماس در نقطه ی $T(۱,۱)$ برابر $y=۱$ و در نقطه ی $T'(۱,۳)$ برابر $y=۳$ است.

مثال: به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c ، بیضی $۴x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در مبدا مختصات بر محور x ها مماس است و از نقطه ی $(-۱,۲)$ می گذرد؟

حل: نقاط $(-۱,۲)$ و $(۰,۰)$ (مختصات مبدا) روی بیضی قرار دارد. پس مختصات آن ها در معادله ی بیضی صدق می کند.

$$۴x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \Rightarrow \begin{cases} (-۱,۲): ۴(-۱)^۲+(۲)^۲+a(-۱)+b(۲)+c=۰ \Rightarrow -a+۲b+c=-۸\,(\mathrm{I}) \\ (۰,۰): ۴(۰)^۲+(۰)^۲+a(۰)+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰\,(\mathrm{II}) \end{cases}$$

هم چنین بیضی در مبدا مختصات بر محور x ها(خط $y=۰$)مماس است. یعنی شیب خط مماس بر بیضی در این نقطه صفر است. بنابراین داریم:

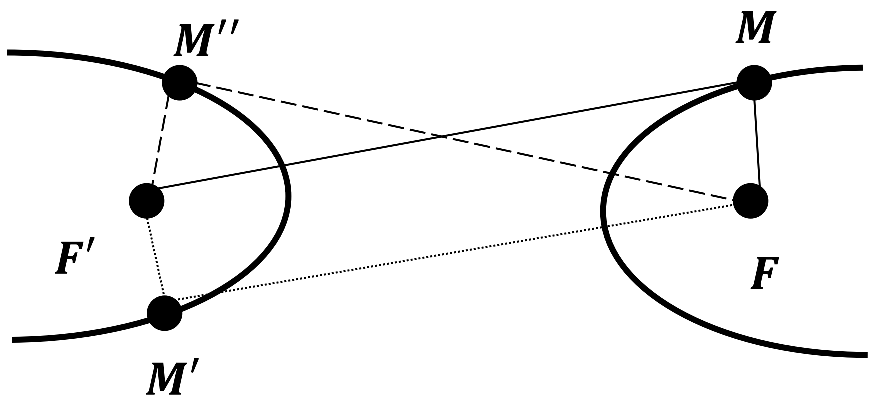
$$f(x,y)=۴x^۲+y^۲+ax+by+c \Rightarrow f'(x,y)=-\frac{۸x+a}{۲y+b} \Rightarrow f'(۰,۰)=۰ \Rightarrow -\frac{۸(۰)+a}{۲(۰)+b}=۰$$

$$\frac{a}{b}=۰ \Rightarrow a=۰\,(\mathrm{III}) \xrightarrow{(\mathrm{I})\text{و}(\mathrm{II})\text{و}(\mathrm{III})} ۲b=-۸ \Rightarrow b=-۴$$

هذلولی: $(Hyperbola)$

مجموعه ی نقاطی از صفحه ی مختصات که قدر مطلق تفاضل فواصل آن ها از دو نقطه ی ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد را هذلولی می گوییم.

این دو نقطه ی ثابت و متمایز F و F' را کانون های هذلولی نامیده و این مقدار ثابت مثبت را با $۲a$ نمایش می دهیم.



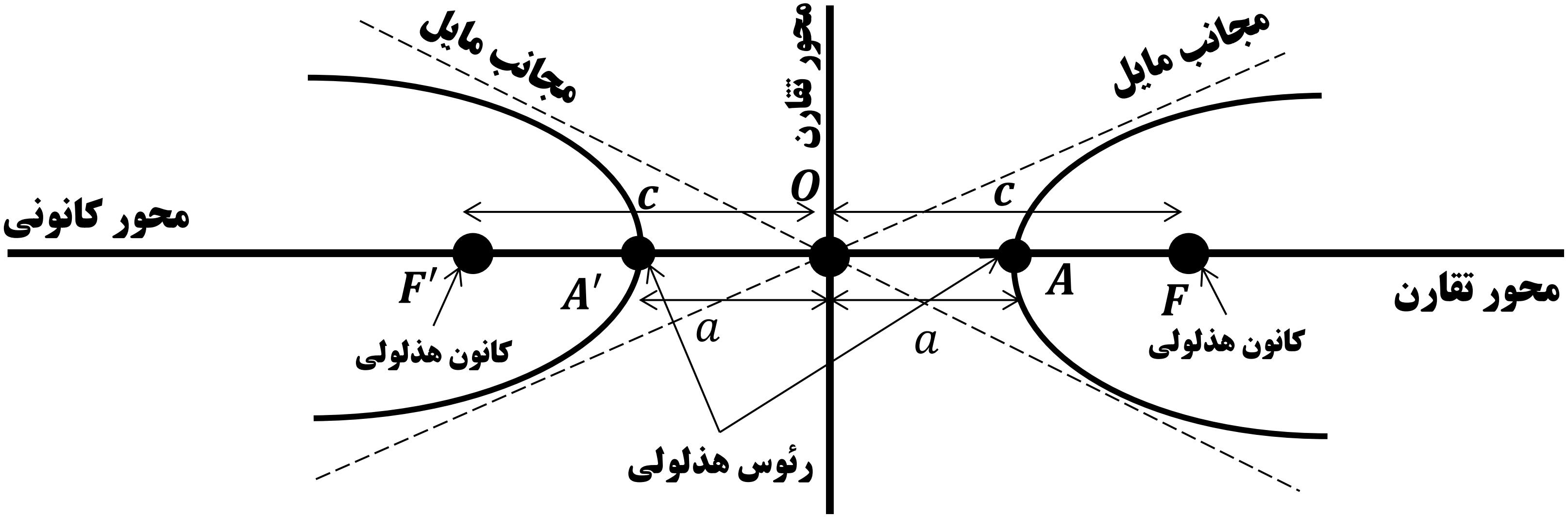
$$|MF - MF'| = |M'F - M'F'| = |M''F - M''F'| = \cdots = ۲a$$

اصطلاحات مهم در هذلولی:

با توجه به هذلولی زیر، اصطلاحات زیر را تعریف می کنیم:

۱) محور کانونی هذلولی: خطی که دو نقطه ی ثابت F و F' (کانون های هذلولی) را به هم وصل می کند، محور کانونی هذلولی نام دارد.

۲) راس های هذلولی: محور کانونی، هذلولی را در نقاط A و A' قطع می کند که به آن ها راس های هذلولی می گوییم. هر هذلولی دارای دو راس کانونی A و A' است ولی راس ناکانونی ندارد.



۳) مجانب های هذلولی: دو خطی که به صورت خط چین در شکل مشخص شده اند را، مجانب های هذلولی می نامیم. نمودار هذلولی در $\pm\infty$ ($x \longrightarrow \pm\infty$) به این خطوط بسیار نزدیک می شوند.

۴) مرکز هذلولی: وسط پاره خط AA' یا پاره خط FF' را مرکز هذلولی (نقطه ی O) می نامیم که دو مجانب هذلولی در این نقطه همدیگر را قطع می کنند. هم چنین مرکز هذلولی، محل برخورد مجانب های هذلولی با محور کانونی است.

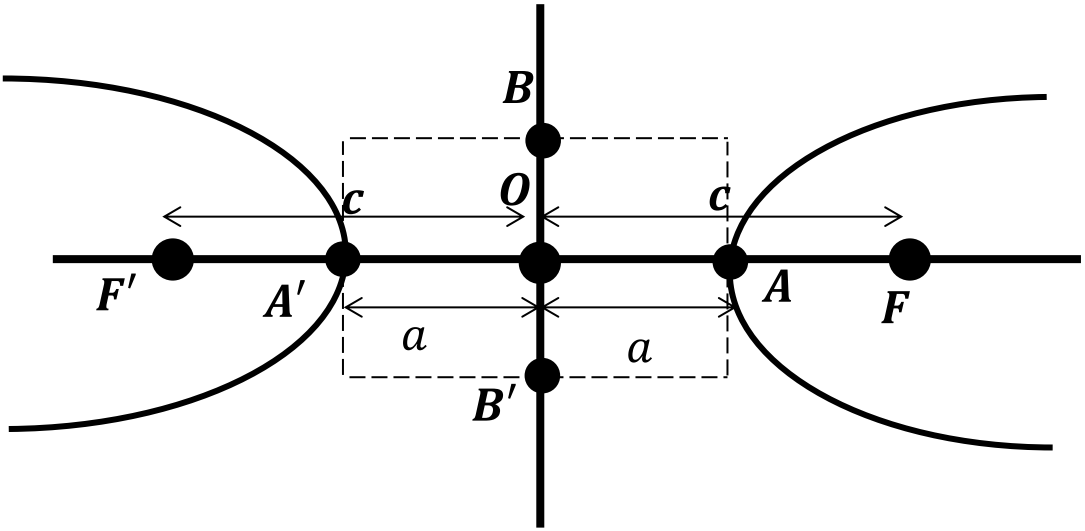
۵) فاصله ی کانونی: فاصله ی دو کانون F و F' (پاره خط FF') را فاصله ی کانونی نامیده و اندازه ی آن را با $2c$ نمایش می دهیم.

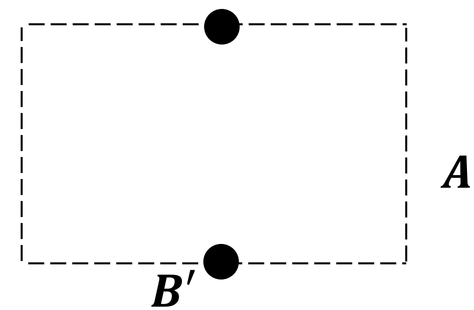
۶) قطر هذلولی: فاصله ی دو راس A و A' (پاره خط AA') را قطر هذلولی نامیده و اندازه ی آن را با $2a$ نمایش می دهیم.

۷) محورهای تقارن هذلولی: خط AA' و FF' و هم چنین خطی که در مرکز هذلولی بر این دو خط عمود است را محورهای تقارن هذلولی می نامیم.

۸) محور ناکانونی هذلولی: خط عمود بر AA' (یا FF') در مرکز هذلولی را محور ناکانونی هذلولی می گوییم.

تذکر: رابطه ی بین پارامترهای b, a و c در هذلولی به صورت $c^۲ = a^۲ + b^۲$ می باشد که در آن $۲b$ را طول قطر موهومی هذلولی(یعنی BB') نامیده می شود و در واقع عرض مستطیل در شکل زیر است:





با توجه به شکل بالا و فرمول $c^۲ = a^۲ + b^۲$ می توان نتیجه گرفت که پارامتر c همواره از دو پارامتر a و b بزرگ تر می باشد. اما نمی توان دو پارامتر a و b را با هم مقایسه نمود و با توجه به نوع هذلولی می تواند هر یک از سه حالت $a < b$ ، $a > b$ و یا حتی $a = b$ رخ دهد.

مثال: اگر نقاط $F(۲,۳)$ و $F'(-۴,۳)$ کانون های یک هذلولی باشد و هذلولی از نقطه ی $M(۲, -۵)$ عبور کند، طول قطر هذلولی را به دست آورید.

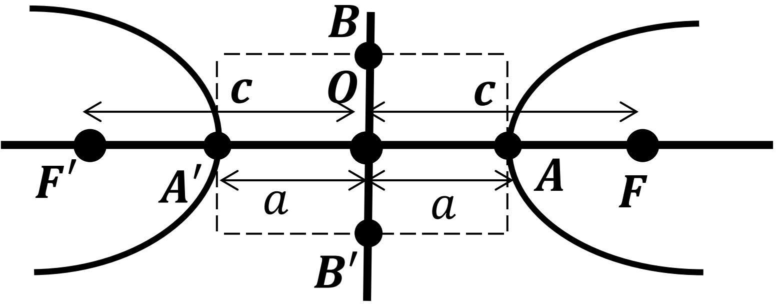
حل: طبق تعریف فاصله ی دو راس A و A' قطر هذلولی بوده که برابر $۲a$ می باشد. با توجه به تعریف هذلولی چون $M(۲, -۵)$ روی هذلولی قرار دارد، پس قدر مطلق اختلاف فواصل آن از دو کانون F و F' برابر $۲a$ می باشد. پس داریم:

فاصله ی M از F: $MF = \sqrt{(x_F - x_M)^۲ + (y_F - y_M)^۲} = \sqrt{(۲-۲)^۲ + \left(۳-(-۵)\right)^۲} = \sqrt{۰ + ۶۴} = ۸$

فاصله ی M از F': $MF' = \sqrt{(x_{F'} - x_M)^۲ + (y_{F'} - y_M)^۲} = \sqrt{(-۴-۲)^۲ + \left(۳-(-۵)\right)^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = ۱۰$

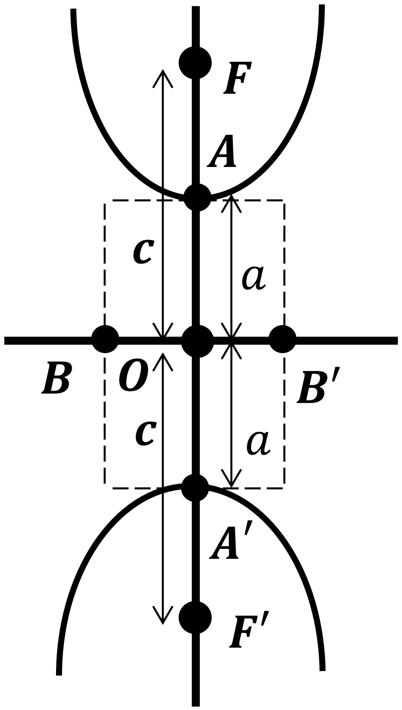
$$\xRightarrow{\text{تعریف هذلولی}} |MF - MF'| = ۲a \Rightarrow |۸ - ۱۰| = ۲a \Rightarrow |-۲| = ۲a \Rightarrow ۲a = ۲$$

هذلولی افقی و قائم و معادله ی آن ها:



الف) هذلولی افقی: اگر محور کانونی یک هذلولی موازی محور x ها باشد، هذلولی افقی بوده و معادله ی آن در صورتی که مختصات مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ باشد؛ به صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱}$$



ب) هذلولی قائم: اگر محور کانونی یک هذلولی موازی محور y ها باشد، هذلولی قائم بوده و معادله ی آن در صورتی که مختصات مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ باشد؛ به صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱}$$

50

تذکر: در معادلات استاندارد بیان شده، پشت پرانتزهای $(x-\alpha)^۲$ و $(y-\beta)^۲$ هم چنین پشت x و y داخل پرانتزها، هیچ عددی وجود ندارد. پس اگر معادله به صورت $\frac{m(x-\alpha)^۲}{A}-\frac{n(y-\beta)^۲}{B}=۱$ بود باید آن را به صورت زیر درآوریم:

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{\frac{A}{m}}-\frac{(y-\beta)^۲}{\frac{B}{n}}=۱$$

تذکر: در معادله ی استاندارد هذلولی، یک طرف تساوی حتما باید عدد یک باشد و اکر معادله به صورت $\frac{(x-\alpha)^۲}{m}-\frac{(y-\beta)^۲}{n}=c$ باشد، باید طرفین تساوی را بر عدد $c\neq ۰$ تقسیم کنیم تا به معادله ی استاندارد هذلولی برسیم:

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{m}-\frac{(y-\beta)^۲}{n}=c\Rightarrow\frac{\frac{(x-\alpha)^۲}{m}-\frac{(y-\beta)^۲}{n}}{\frac{c}{۱}}=\frac{c}{c}\Rightarrow\frac{(x-\alpha)^۲}{mc}-\frac{(y-\beta)^۲}{nc}=۱$$

روش تشخیص هذلولی های افقی و قائم:

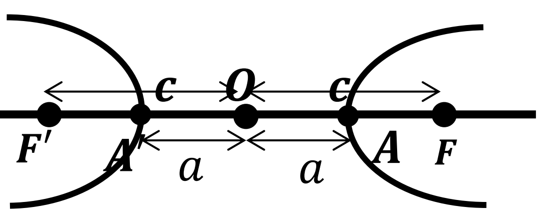
۱) با توجه به معادلات بیان شده نتیجه می گیریم هرگاه در معادله ی استاندارد ضریب پرانتز دارای x مثبت باشد، هذلولی افقی و هرگاه ضریب پرانتز شامل y مثبت باشد، هذلولی قائم می باشد.

۲) در معادله ی استاندارد هذلولی، مخرج کسر مثبت همیشه برابر $a^۲$ و مخرج کسر منفی همیشه برابر $b^۲$ است.

تذکر: اگر در یک هذلولی $a=b$ ، آن گاه هذلولی را متساوی الساقین یا متساوی القطرین می گویند.

مثال: معادله ی هذلولی را بنویسید که $F(۶,۱)$ و $F'(-۴,۱)$ کانون ها و طول قطر کانونی AA' برابر ۸ باشد.

حل: چون عرض کانون ها با هم برابر است، هذلولی افقی می باشد. مرکز هذلولی، نقطه ی وسط پاره خط FF' است. پس داریم:



$$\begin{cases}\alpha=x_O=\frac{x_F+x_{F'}}{۲}=\frac{۶+(-۴)}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱\\ \beta=y_O=\frac{y_F+y_{F'}}{۲}=\frac{۱+۱}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱\end{cases}\Rightarrow O(۱,۱)$$

حال باید پارامترهای b, a و c را به دست آوریم. فاصله ی دو راس که همان قطر کانونی هذلولی می باشد،طبق تعریف $2a$و فاصله ی دو کانون برابر $2b$است.

$$AA' = 2a \xrightarrow{AA'=8} 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$FF' = 2c \Rightarrow \sqrt{(x_F - x_{F'})^2 + (y_F - y_{F'})^2} = 2c \Rightarrow \sqrt{(-4-6)^2 + (1-1)^2} = 2c \Rightarrow$$
$$\sqrt{100} = 10 = 2c \Rightarrow c = 5$$

از طرفی داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\xRightarrow{\text{معادله ی هذلولی افقی}} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \xRightarrow{O(1,1)=(\alpha,\beta),a=4,b=3} \frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

معادله ی گسترده ی هذلولی:

به طور کلی معادله ی $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ در صورتی که ضرایب x^2 و x^2 یعنی a و b اعدادی مخالف صفر و مختلف العلامه باشند،مختلف العلامه باشند($ab < 0$)، می تواند معادله ی گسترده ی هذلولی باشد.
در این صورت برای یافتن مشخصات یک هذلولی باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد (همان گونه که در مورد بیضی گفته شد) تبدیل کنیم.

مثال: معادله ی گسترده ی هذلولی $۹x^۲ - ۴y^۲ + ۱۸x + ۸y - ۳۱ = ۰$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.

حل:

$$\xrightarrow[\text{و جملات شامل y را نیز کنار هم قرار می دهیم.}]{\text{جملات شامل x را کنار هم}} (۹x^۲ + ۱۸x) + (-۴y^۲ + ۸y) = ۳۱ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ در هر پرانتز}}$$

$$۹(x^۲ + ۲x) - ۴(y^۲ + ۴y) = ۱۱ \xrightarrow[\text{مربع کامل می کنیم}]{\text{هر یک پرانتزها را}} ۹(x^۲ + ۲x + ۱ - ۱) - ۴(y^۲ - ۲y + ۱ - ۱) = ۳۱$$

$$\Rightarrow ۹\underbrace{(x^۲ + ۲x + ۱)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} - ۹ - ۴\underbrace{(y^۲ - ۲y + ۱)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} + ۴ = ۳۱ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۹(x + ۱)^۲ - ۴(y - ۱)^۲ - ۵ = ۳۱$$

$$\Rightarrow ۹(x + ۱)^۲ - ۴(y - ۱)^۲ = ۳۱ + ۵ = ۳۶ \Rightarrow ۹(x + ۱)^۲ - ۴(y - ۱)^۲ = ۳۶$$

$$\frac{۹(x + ۱)^۲ - ۴(y - ۱)^۲}{۳۶} = \frac{۳۶}{۳۶} \Rightarrow \frac{۹(x + ۱)^۲}{۳۶} - \frac{۴(y - ۱)^۲}{۳۶} = ۱ \Rightarrow \frac{(x + ۱)^۲}{۴} - \frac{(y - ۱)^۲}{۹} = ۱$$

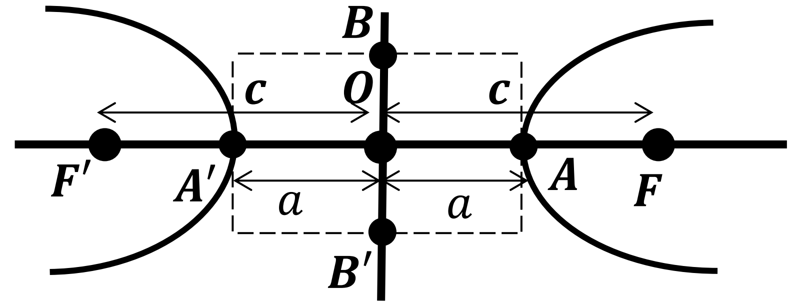
تمرین: معادله ی گسترده ی $۳y^۲ - x^۲ + ۴x - ۱۲y - ۴ = ۰$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.

مختصات مرکز، رئوس و کانون های هذلولی:

الف) مختصات مرکز $O(\alpha, \beta)$: در معادله ی استاندارد هذلولی، برای به دست آوردن مختصات مرکز هذلولی، هر دو پرانتز شامل x و y را مساوی صفر قرار می دهیم. ریشه های به دست آمده طول و عرض مرکز هذلولی می باشند.مثال:

$$\frac{(x + ۱)^۲}{۴} - \frac{(y - ۱)^۲}{۹} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \end{cases} \Rightarrow O(-۱,۱)$$:مختصات مرکز هذلولی

ب) مختصات رئوس و کانون ها: در هر هذلولی افقی(قائم) رئوس A و A' ،کانون های F و F' و مرکز هذلولی $O(\alpha,\beta)$ همگی روی محور کانونی هذلولی که خطی افقی (قائم) می باشد، قرار دارند. بنابراین عرض (طول) تمام این ۵ نقطه برابر $\beta$$(\alpha)$ می باشد و فقط طول های (عرض های) این نقاط با هم متفاوت است که با توجه به موقعیت نسبت به مرکز هذلولی، می توان آن ها را به دست آورد.



مثال: مختصات راس ها و کانون ها و مرکز هذلولی های زیر را به دست آورید.

الف) $4x^2 = y^2 - 4y + 8$

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به روش مربع کامل و تجزیه به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

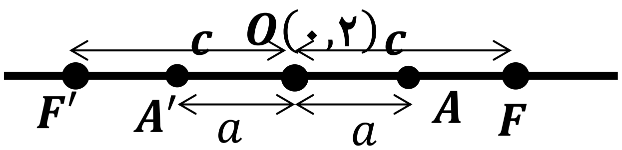
$$\Rightarrow 4x^2 = \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} - 4 + 8 \Rightarrow 4x^2 = (y-2)^2 + 4 \Rightarrow 4x^2 - (y-2)^2 = 4$$

$$\xRightarrow{\div 4} \frac{4x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

با توجه به معادله ی به دست آمده، هذلولی افقی(چون ضریب پرانتز x مثبت است) و مرکز هذلولی نقطه ی $O(0,2)$می باشد.

$$\xRightarrow{\text{هذلولی افقی}} a = \sqrt{1} = 1, b = \sqrt{4} = 2 \quad \xRightarrow{c^2=a^2+b^2} c = \sqrt{5}$$

برای محاسبه ی مختصات رئوس و کانون های هذلولی از شکل زیر کمک می گیریم.



$$A(۰+a,۲)\xRightarrow{a=۱}A(۱,۲)\qquad F(۰+c,۲)\xRightarrow{c=\sqrt{۵}}F(\sqrt{۵},۲)$$

$$A'(۰-a,۲)\xRightarrow{a=۱}A(-۱,۲)\qquad F(۰-c,۲)\xRightarrow{c=\sqrt{۵}}F(-\sqrt{۵},۲)$$

ب) $۴x^۲-۵y^۲-۱۶x+۱۰y+۳۱=۰$

حل: **ابتدا معادله ی داده شده را به روش مربع کامل و تجزیه به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.**

$$\xRightarrow[\text{و جملات شامل } y \text{ را نیز کنار هم قرار می دهیم.}]{\text{جملات شامل } x \text{ را کنار هم}}(۴x^۲-۱۶x)+(-۵y^۲+۱۰y)=-۳۱\xRightarrow{\text{فاکتورگیری از ضرایب } x^۲ \text{ و } y^۲ \text{ در هر پرانتز}}$$

$$\Rightarrow ۴(x^۲-۴x)-۵(y^۲-۲y)=-۳۱\xRightarrow[\text{مربع کامل می کنیم}]{\text{هر یک پرانتزها را}}۴(x^۲-۴x+۴-۴)-۵(y^۲-۲y+۱-۱)=-۳۱$$

$$\Rightarrow ۴\underbrace{(x^۲-۴x+۴)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}-۱۶-۵\underbrace{(y^۲-۲y+۱)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}+۵=-۳۱\xRightarrow{\text{تجزیه}}۴(x-۲)^۲-۵(y-۱)^۲-۱۱=-۳۱$$

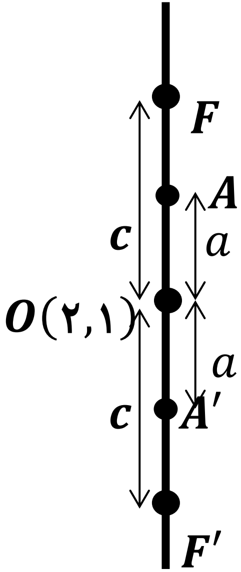
$$\Rightarrow ۴(x-۲)^۲-۵(y-۱)^۲=-۳۱+۱۱=-۲۰\Rightarrow ۴(x-۲)^۲-۵(y-۱)^۲=-۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴(x-۲)^۲-۵(y-۱)^۲}{-۲۰}=\frac{-۲۰}{-۲۰}\Rightarrow\frac{۴(x-۲)^۲}{-۲۰}-\frac{۵(y-۱)^۲}{-۲۰}=۱\Rightarrow\frac{(y-۱)^۲}{۴}-\frac{(x-۲)^۲}{۵}=۱$$

با توجه به معادله ی به دست آمده، هذلولی قائم(چون ضریب پرانتز y مثبت است) و مرکز هذلولی نقطه ی $O(۲,۱)$می باشد

$$\xRightarrow{\text{هذلولی قائم}}a=\sqrt{۴}=۲,\ b=\sqrt{۵}\qquad\xRightarrow{c^۲=a^۲+b^۲}c=\sqrt{۹}=۳$$

برای محاسبه ی مختصات رئوس و کانون های هذلولی از شکل زیر کمک می گیریم.



$$A(۲,۱+a)\xRightarrow{a=۲}A(۲,۳)$$

$$A(۲,۱-a)\xRightarrow{a=۲}A(۲,-۱)$$

$$F(۲,۱+c)\xRightarrow{c=۳}F(۲,۱+۳)\Rightarrow F(۲,۴)$$

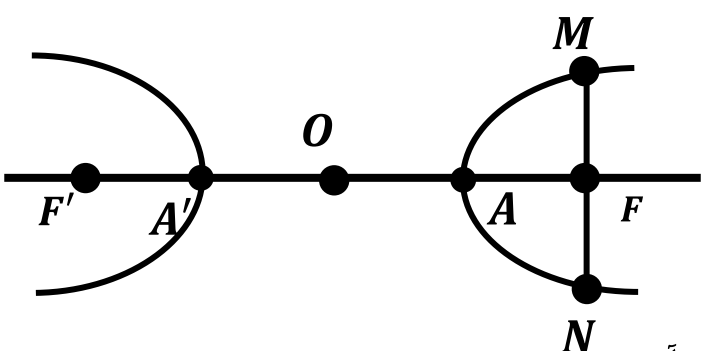
$$F(۲,۱-c)\xRightarrow{c=۳}F(۲,۱-۳)\Rightarrow F(۲,-۲)$$

وتر کانونی هذلولی:

وتر گذرنده از کانون هذلولی و عمود بر محور کانونی هذلولی را وتر کانونی هذلولی می نامیم.

طول وتر کانونی هذلولی برابر است با:

$$MN=\frac{۲b^{۲}}{a}$$



مثال: طول وتر کانونی هذلولی $\frac{(x-۱)^{۲}}{۱۶}-\frac{(y+۱)^{۲}}{۹}=۱$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases}a=\sqrt{۱۶}=۴\\ b=\sqrt{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow MN=\frac{۲b^{۲}}{a}\Rightarrow MN=\frac{۲(۳)^{۲}}{۴}=\frac{۲\times ۹}{۴}=۴/۵$$

خروج از مرکز هذلولی:

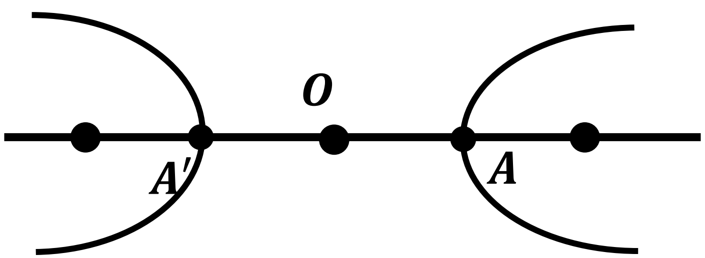
خروج از مرکز هذلولی، همانند بیضی از فرمول $e = \frac{c}{a}$ به دست می آید و چون در هر هذلولی رابطه ی $c^۲ = a^۲ + b^۲$ برقرار است، پس همواره $c > a$ و در نتیجه در هذلولی $e > ۱$ می باشد. هم چنین داریم:

$$e = \frac{c}{a} \xRightarrow{c^۲=a^۲+b^۲ \Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}} e = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a} \overset{a=\sqrt{a^۲}}{=\!=\!=} \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{\sqrt{a^۲}} = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}}$$

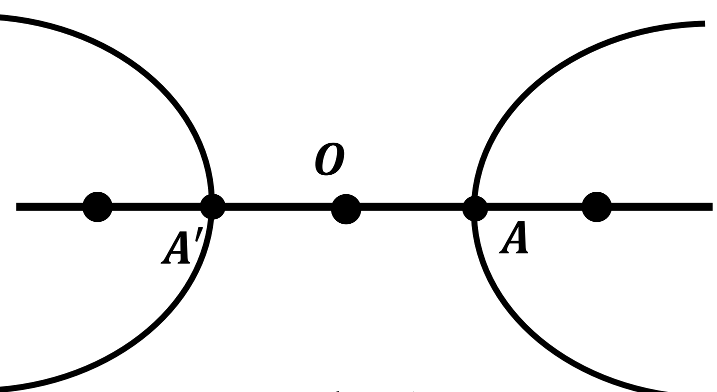
$$\Rightarrow e = \sqrt{۱ + \frac{b^۲}{a^۲}}$$

رابطه ای دیگر برای خروج از مرکز هذلولی:

تذکر: با افزایش(کاهش) e، فاصله ی دو سر هر شاخه از هذلولی از هم بیش تر شده(کمتر شده) و دهانه ی شاخه ها بازتر (بسته تر) می شود.



خروج از مرکز: $e_۱$



خروج از مرکز: $e_۲$

$$\Rightarrow e_۲ > e_۱$$

رابطه ای دیگر برای وتر کانونی:

طول وتر کانونی را از رابطه ی $MN = ۲b\sqrt{e^{۲} - ۱}$ نیز می توان به دست آورد.

برهان:

$$e = \sqrt{۱ + \frac{b^{۲}}{a^{۲}}} \Rightarrow e^{۲} = ۱ + \frac{b^{۲}}{a^{۲}} \Rightarrow \frac{b^{۲}}{a^{۲}} = e^{۲} - ۱ \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{e^{۲} - ۱}$$

از طرفی داریم:

$$MN = \frac{۲b^{۲}}{a} = ۲b.\frac{b}{a} \Rightarrow MN = ۲b\sqrt{e^{۲} - ۱}$$

مثال: معادله ی هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدا مختصات، محور کانونی آن منطبق بر محور x ها، خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و طول وتر کانونی آن ۴ باشد.

حل: چون محور کانونی منطبق بر محور x ها است پس هذلولی افقی می باشد. هم چنین مختصات مرکز هذلولی $O(۰,۰)$ می باشد. حال با استفاده از فرمول وتر کانونی داریم:

$$MN = ۲b\sqrt{e^{۲} - ۱} \xRightarrow{MN=۴,e=\frac{\sqrt{۵}}{۲}} ۴ = ۲b\sqrt{\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲} - ۱} \Rightarrow ۴ = ۲b\sqrt{\frac{۵}{۴} - ۱} \Rightarrow ۲ = b\sqrt{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow ۲ = b \times \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow b = ۴$$

از طرفی فرمول دیگر وتر کانونی $MN = \frac{۲b^{۲}}{a}$ می باشد. پس داریم:

$$MN = \frac{۲b^{۲}}{a} \Rightarrow ۴ = \frac{۲(۴)^{۲}}{a} \Rightarrow a = \frac{۳۲}{۴} = ۸ \Rightarrow \frac{(x-۰)^{۲}}{۸^{۲}} - \frac{(y-۰)^{۲}}{۴^{۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۶۴} - \frac{y^{۲}}{۱۶} = ۱$$

معادلات خطوط مماس و قائم بر هذلولی:

برای نوشتن معادله ی خط مماس بر هذلولی در نقطه ی $M(x_{\circ}, y_{\circ})$ واقع بر آن،
همانند آن چه در باره ی بیضی گفته شد، ابتدا شیب خط مماس بر هذلولی در نقطه ی
$M(x_{\circ}, y_{\circ})$ (مشتق ضمنی y نسبت به x در نقطه ی $M(x_{\circ}, y_{\circ})$) را به دست می آوریم.
سپس معادله ی خط مماس را با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن می نویسیم.
اما برای یافتن معادله ی خط قائم بر هذلولی در نقطه ی $M(x_{\circ}, y_{\circ})$ واقع بر آن،
شیب خط مماس را قرینه و معکوس می کنیم. سپس با استفاده از شیب به دست آمده
و نقطه ی $M(x_{\circ}, y_{\circ})$ معادله ی خط قائم را می نویسیم.

مثال: معادله ی خط مماس بر هذلولی به معادله ی $\frac{x^{2}}{10} - \frac{y^{2}}{9} = 1$ را در نقطه ی $\left(\frac{10}{3}, 1\right)$ واقع بر آن بنویسید.

حل: ابتدا شیب خط مماس در نقطه ی را با استفاده از مشتق ضمنی به دست می آوریم.

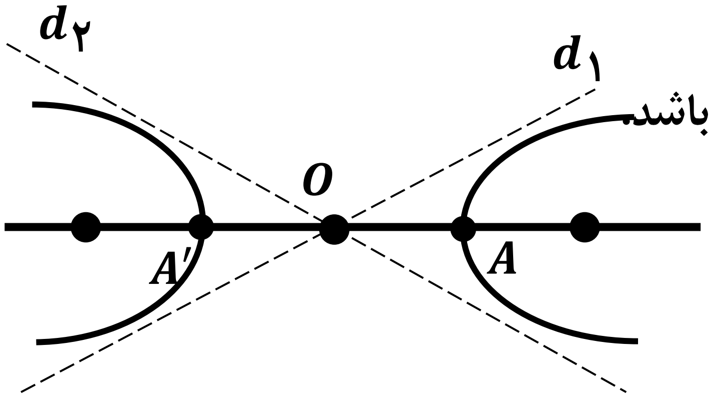
$$f(x,y) = \frac{x^{2}}{10} - \frac{y^{2}}{9} - 1 = 0 \Rightarrow f'(x,y) = -\frac{\frac{2x}{10}}{\frac{-2y}{9}} = \frac{9x}{10y} \Rightarrow f'\left(\frac{10}{3}, 1\right) = \frac{9 \times \frac{10}{3}}{10 \times 1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\xRightarrow{\text{معادله ی خط مماس}} y - y_{\circ} = m(x - x_{\circ}) \Rightarrow y - 1 = 3\left(x - \frac{10}{3}\right) \Rightarrow y = 3x - 9$$

مجانب های هذلولی:

الف) هذلولی افقی:

مجانب های هذلولی افقی به معادله ی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ **مطابق شکل زیر، خطوط** d_1 **و** d_2 **می باشند که از مرکز هذلولی** $O(\alpha,\beta)$ **عبور می کنند.**



به طور مشابه شیب خط d_1 **برابر** $\frac{b}{a}$ **و شیب خط** d_2 **برابر** $-\frac{b}{a}$ **می باشد.**

بنابراین معادله ی خطوط مجانب به صورت زیر می باشد:

$$y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow{O(\alpha,\beta),m=\pm\frac{b}{a}}y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$$

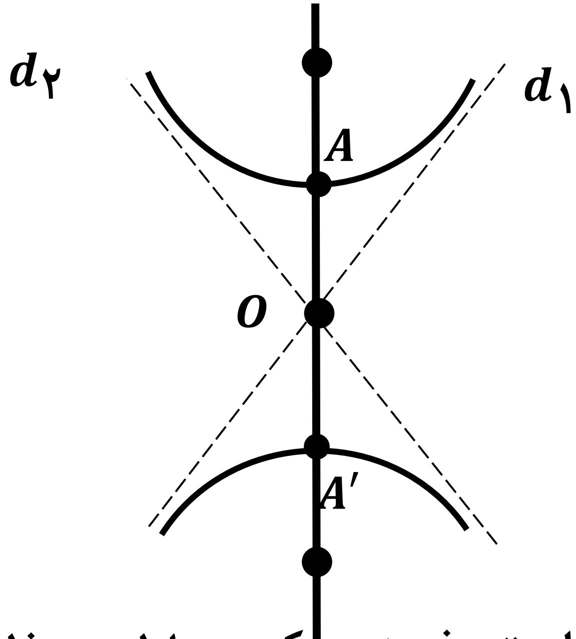
شکل دیگر معادلات مجانب های هذلولی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(x-\alpha)}{a}\pm\frac{(y-\beta)}{b}=0$$

الف) هذلولی قائم:

مجانب های هذلولی قائم به معادله ی $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ **مطابق شکل زیر، خطوط** d_1 **و** d_2 **می باشند که از مرکز هذلولی** $O(\alpha,\beta)$ **عبور می کنند.**

به طور مشابه شیب خط d_1 **برابر** $\frac{a}{b}$ **و شیب خط** d_2 **برابر** $-\frac{a}{b}$ **می باشد.**



بنابراین معادله ی خطوط مجانب به صورت زیر می باشد:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xRightarrow{O(\alpha,\beta),\, m=\pm\frac{a}{b}} y - \beta = \pm\frac{a}{b}(x - \alpha)$$

شکل دیگر معادلات مجانب های هذلولی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(y-\beta)}{a} \pm \frac{(x-\alpha)}{b} = 0$$

تذکر: **برای پیداکردن معادله های مجانب های هذلولی های افقی یا قائم، کافی است جذر هر دو کسر معادله ی هذلولی را گرفته و بین آن ها علامت $\pm$ قرار داده و در انتها به جای عدد ۱، عدد صفر را قرار می دهیم.**

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

جذر جذر

$$\frac{(x-\alpha)}{a} \pm \frac{(y-\beta)}{b} = 0$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

جذر جذر

$$\frac{(y-\beta)}{a} \pm \frac{(x-\alpha)}{b} = 0$$

تذکر: **تانژانت زاویه ی بین مجانب های هذلولی افقی را می توان به کمک فرمول زیر به دست آورد:**

$$\tan\theta = \frac{2ab}{|a^2 - b^2|}$$

مثال: معادله ی خطوط مجانب هذلولی $(x-۱)^۲-\frac{(y+۱)^۲}{۴}=۱$ را بنویسید.

حل: طبق نکته ی گفته شده داریم:

$$(x-۱)^۲-\frac{(y+۱)^۲}{۴}=۱$$

جذر   جذر

$$x-۱\pm\frac{y+۱}{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱+\frac{y+۱}{۲}=۰\Rightarrow\frac{y+۱}{۲}=-x+۱\Rightarrow y+۱=-۲x+۲\Rightarrow y=-۲x+۱\\ x-۱-\frac{y+۱}{۲}=۰\Rightarrow\frac{y+۱}{۲}=x-۱\Rightarrow y+۱=۲x-۲\Rightarrow y=۲x-۳\end{cases}$$

مثال: معادله ی یک هذلولی را بنویسید که خطوط $۳x+۲y+۱=۰$ و $۳x-۲y-۷=۰$ مجانب های آن بوده و از نقطه ی $M\left(۱+۲\sqrt{۳},۴\right)$ بگذرد.

حل: می دانیم محل تلاقی مجانب های هذلولی، مرکز هذلولی می باشد. پس با حل دستگاه زیر این نقطه را به دست می آوریم.

$$\begin{cases}۳x+۲y+۱=۰\\۳x-۲y-۷=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+۲y=-۱\\۳x-۲y=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳x-۲y=+۱\\۳x-۲y=۷\end{cases}\Rightarrow y=-۲,x=۱\xrightarrow{\text{مرکز هذلولی}}O(۱,-۲)$$

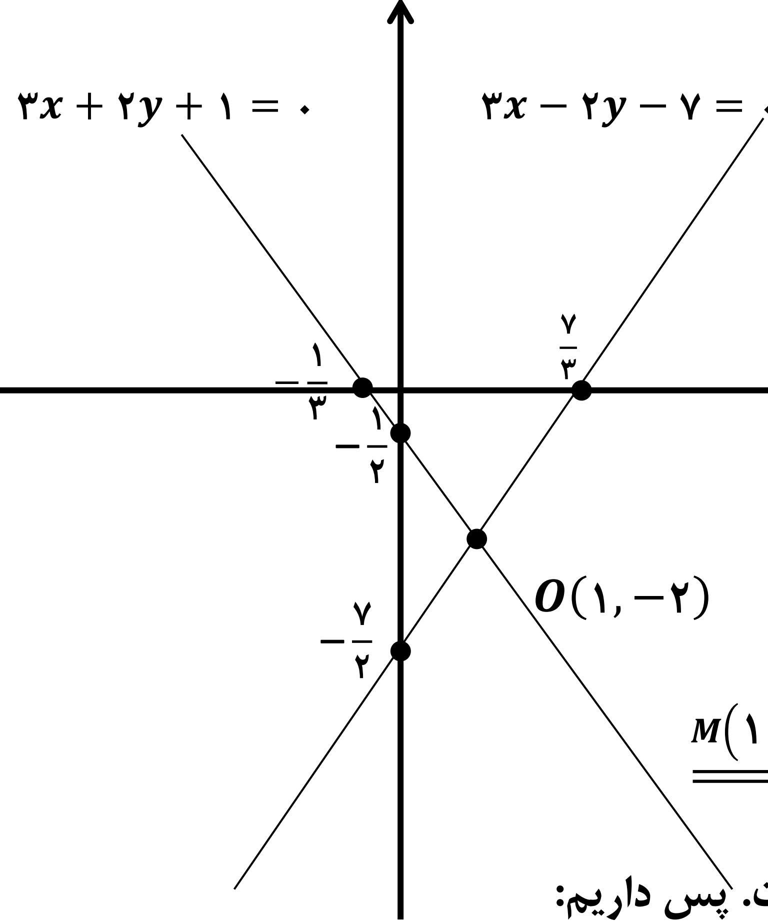
برای تشخیص افقی یا قائم بودن هذلولی نیازمند رسم تقریبی مجانب ها و محل قرار گرفتن نقطه ی $M\left(۱+۲\sqrt{۳},۴\right)$ نسبت به خطوط مجانب هستیم.

$۳x-۲y-۷=۰$

x	۰	$\frac{۷}{۳}$
y	$-\frac{۷}{۲}$	۰

$۳x+۲y+۱=۰$

x	۰	$-\frac{۱}{۳}$
y	$-\frac{۱}{۲}$	۰



$$M(۱ + ۲\sqrt{۳} \cong ۴/۴,۴)$$

برای آن که نمودار هذلولی از نقطه ی M بگذرد، باید هذلولی قائم باشد. بنابراین با استفاده از فرم کلی هذلولی قائم داریم:

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} - \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(y+۲)^۲}{a^۲} - \frac{(x-۱)^۲}{b^۲} = ۱$$

چون نمودار هذلولی از نقطه ی M می گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله ی هذلولی صدق می کند.

$$\xRightarrow{M(۱+۲\sqrt{۳},۴)} \frac{(۴+۲)^۲}{a^۲} - \frac{(۱+۲\sqrt{۳}-۱)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۳۶}{a^۲} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱$$

از طرفی می دانیم شیب خطوط مجانب در هذلولی قائم برابر $\pm\frac{a}{b}$ است. پس داریم:

$$۳x - ۲y - ۷ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۲} \Rightarrow m = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{a}{b} \Rightarrow ۲a = ۳b \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}b$$

بنابراین داریم:

$$\frac{۳۶}{a^۲} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۳۶}{\left(\frac{۳}{۲}b\right)^۲} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۳۶}{\frac{۹b^۲}{۴}} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۴ \times ۳۶}{۹b^۲} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۱۶}{b^۲} - \frac{۱۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{b^۲} = ۱$$

$$\Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲ \xRightarrow{a=\frac{۳}{۲}b} a = \frac{۳}{۲}(۲) = ۳ \xRightarrow{\text{معادله ی هذلولی}} \frac{(y+۲)^۲}{۹} - \frac{(x-۱)^۲}{۴} = ۱$$

رسم هذلولی

الف) رسم هذلولی افقی: برای رسم هذلولی افقی مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱) مرکز هذلولی $O(\alpha,\beta)$ و مقادیر a و b را با استفاده از معادله ی هذلولی به دست می آوریم.

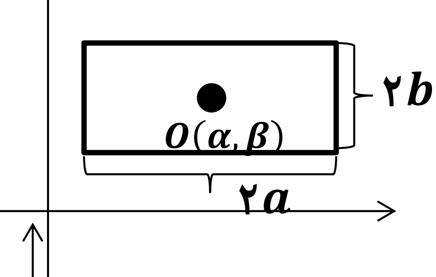
۲) مستطیلی به ابعاد $۲a$ در امتداد افقی و $۲b$ در امتداد قائم و به مرکز $O(\alpha,\beta)$ رسم می کنیم. (شکل ۱)

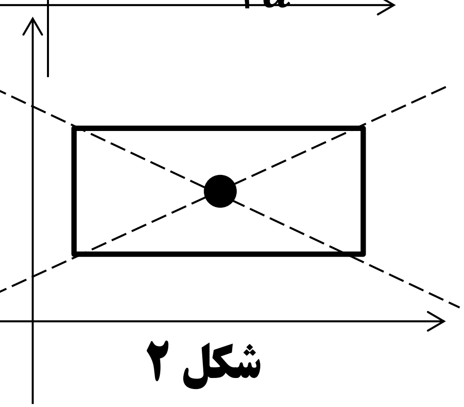
۳) قطر های مستطیل را رسم کرده و از دو طرف امتداد می دهیم تا مجانب های هذلولی حاصل شود. (شکل ۲)

۴) خطی افقی به گونه ای رسم می کنیم تا از مرکز مستطیل عبور کند. این خط که همان محور کانونی هذلولی افقی می باشد، مستطیل را در دو نقطه ی A و A' قطع می کند که این نقاط همان رئوس هذلولی می باشند. (شکل ۳)

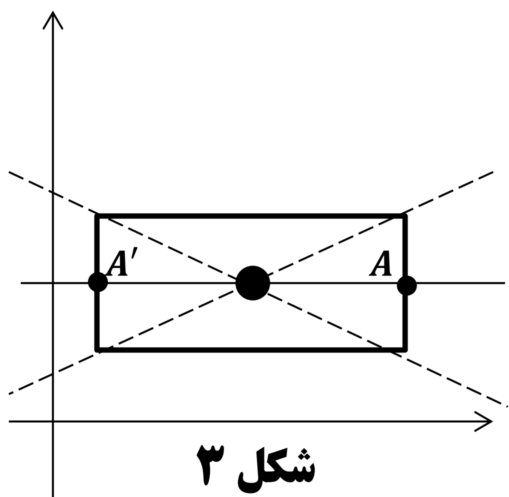
۵) شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها منحنی را ادامه می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد گردد. (شکل ۴)

شکل ۱

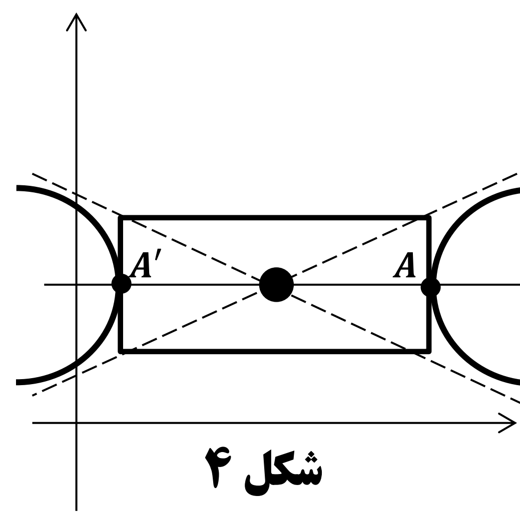




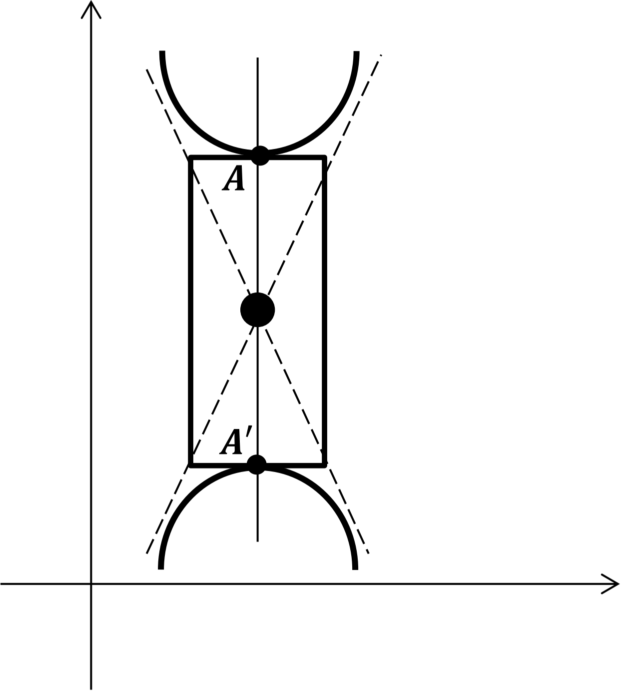
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴



ب) رسم هذلولی قائم: برای رسم هذلولی قائم، همانند قسمت الف عمل می کنیم با این تفاوت که مستطیل به ابعاد $۲a$ در امتداد قائم و $۲b$ در امتداد افقی رسم می کنیم و بعد از رسم قطرهای مستطیل (مجانب ها)، خطی قائم رسم می کنیم تا از مرکز بگذرد و اضلاع افقی مستطیل را در نقاط A و A' قطع کند و در نهایت شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها منحنی را ادامه می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد گردد.

مثال: **نمودار هذلولی زیر را رسم کنید.**

$$\frac{(y-۱)^۲}{۴}-(x-۱)^۲=۱$$

حل: **هذلولی قائم (چون ضریب پرانتز شامل y مثبت است) و مرکز آن $O(۱,۱)$ می باشد.**

ثابت های هذلولی:

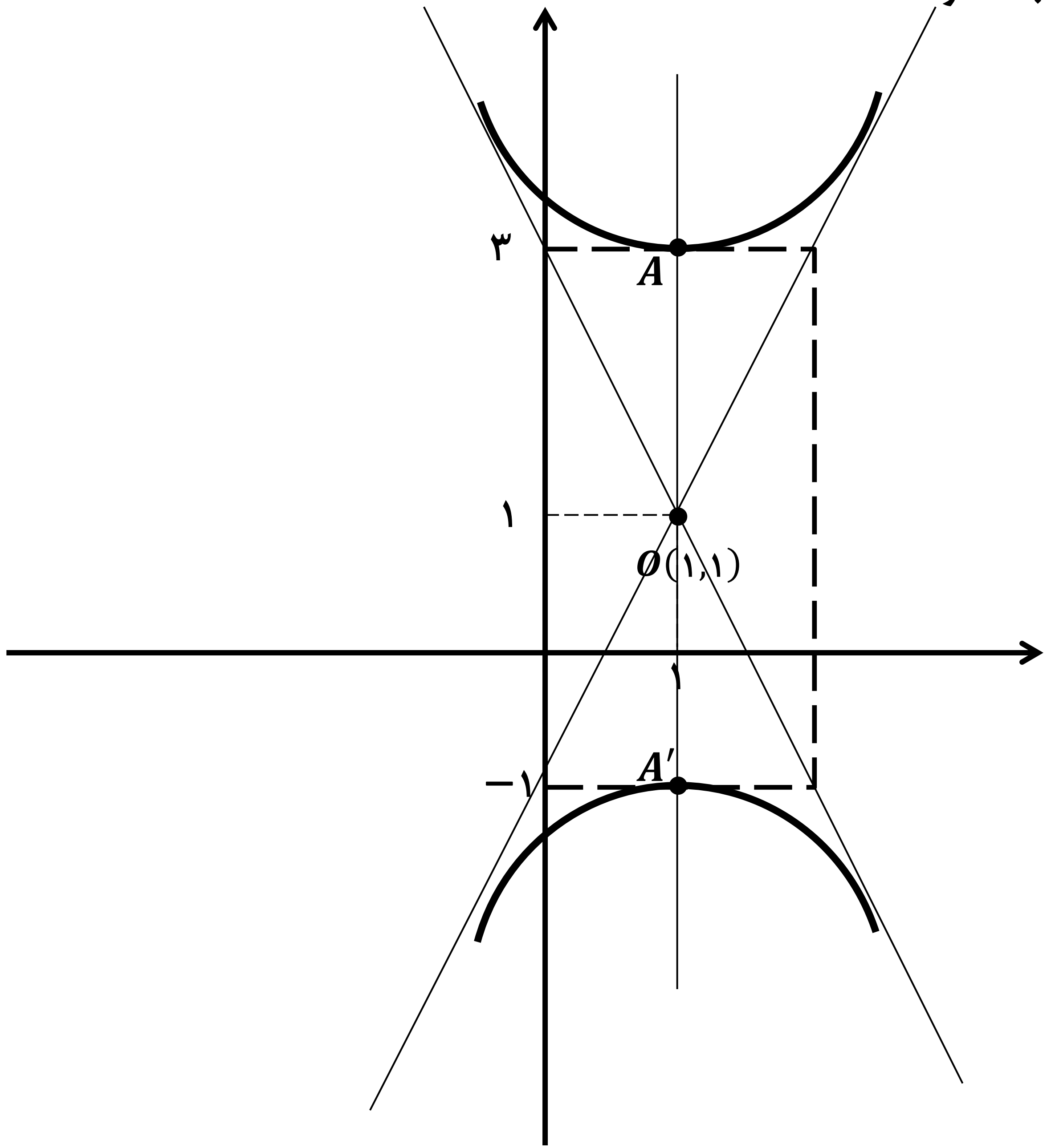
$$a=\sqrt{۴}=۲, b=\sqrt{۱}=۱ \xrightarrow{c^۲=a^۲+b^۲} c^۲=۲^۲+۱^۲ \Rightarrow c^۲=۵ \Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

۱) مستطیلی به ابعاد $۲a=۴$ در امتداد قائم و $۲b=۲$ در امتداد افقی به گونه ای رسم می کنیم که مرکز مستطیل $O(۱,۱)$ باشد.

۲) قطرهای مستطیل را رسم کرده و امتداد می دهیم تا مجانب های هذلولی به دست آید.

۳) خطی قائم به گونه ای رسم می کنیم تا از مرکز مستطیل عبور کرده و مستطیل را در دو نقطه ی A و A' قطع کند. این نقاط همان رئوس هذلولی هستند

۴) شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها، منحنی را امتداد می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد شود.



به نام خداوند بخشنده و مهربان

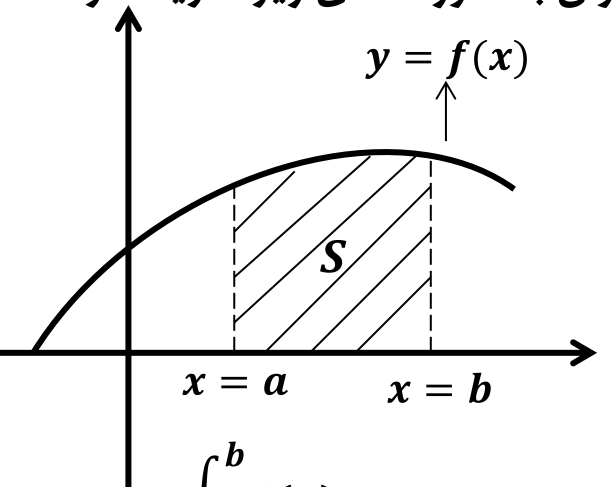
ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی/فصل ششم:

انتگرال

$Integral$

انتگرال معین: $(Definite\ Integral)$

با توجه به موقعیت نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها، انتگرال معین را می توان به صورت های زیر تعریف کرد:

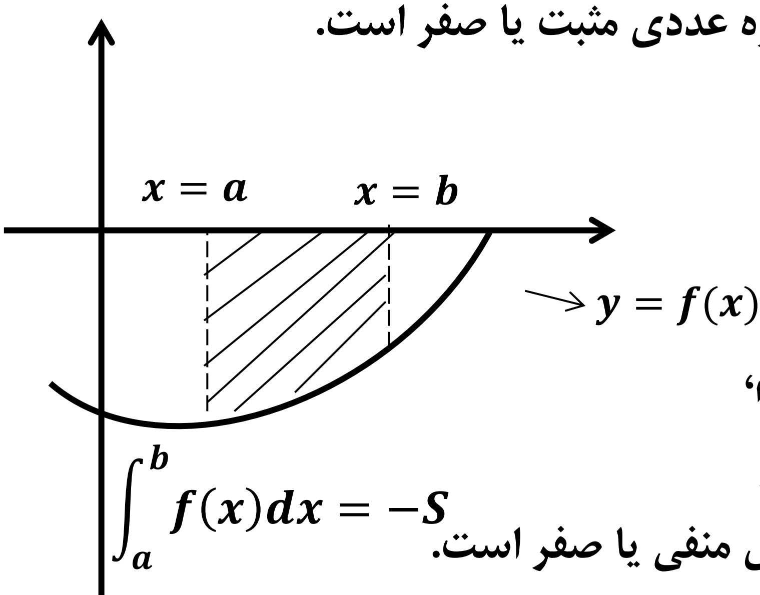


$$\int_a^b f(x)dx = S$$

الف) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه ی $[a, b]$ پیوسته (به جز احتمالا در دو سر بازه یعنی a و b) و برای هر x در این بازه مقدار $f(x)$ نامنفی باشد(یعنی $f(x) \geq 0$). به عبارت دیگر نمودار بالای محور x ها یا روی آن باشد.

در این صورت $\int_a^b f(x)dx$ که آن را انتگرال $f(x)$ از a تا b می خوانیم، مساحت ناحیه ی محصور بین نمودار $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است.

مقادیر a و b را حدود انتگرال گیری نامیده و dx بیان کننده ی این است که متغیر انتگرال گیری x می باشد. بنابراین انتگرال توابع نامنفی، همواره عددی مثبت یا صفر است.

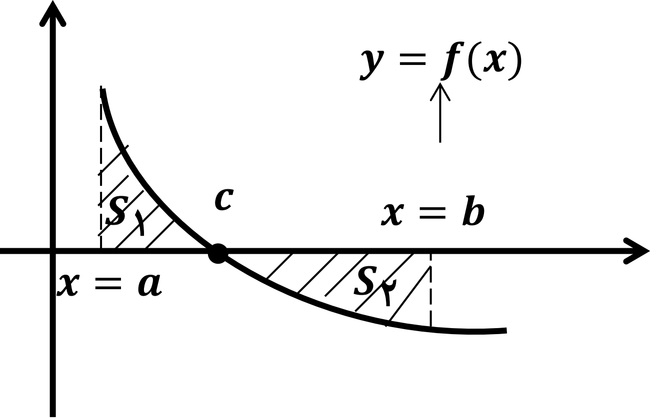


$$\int_a^b f(x)dx = -S$$

ب) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه ی $[a, b]$ پیوسته (به جز احتمالا در دو سر بازه یعنی a و b) و برای هر x در این بازه مقدار $f(x)$ منفی یا صفر باشد(یعنی $f(x) \leq 0$). به عبارت دیگر نمودار زیر محور x ها یا روی آن باشد.

در این صورت $\int_a^b f(x)dx$ که آن را انتگرال $f(x)$ از a تا b می خوانیم، <u>قرینه ی</u> مساحت ناحیه ی محصور بین نمودار $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. بنابراین انتگرال این توابع، همواره عددی منفی یا صفر است.

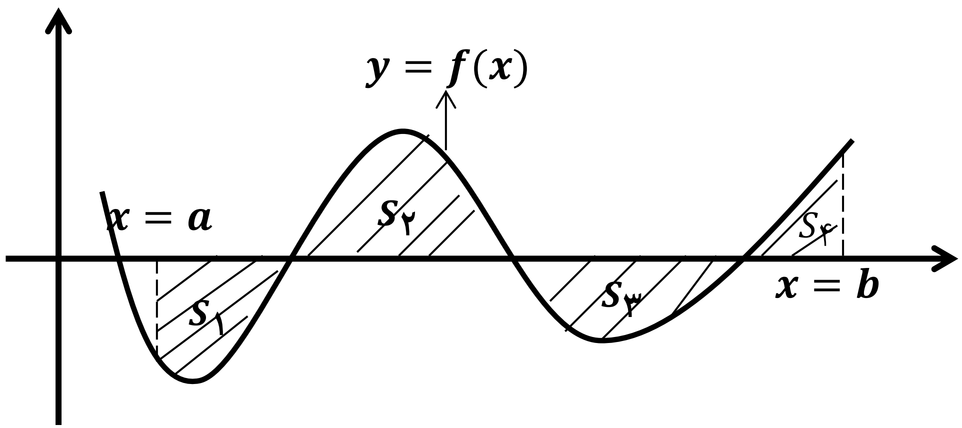
ج) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه ی $[a,b]$ پیوسته (به جز احتمالا در دو سر بازه یعنی a و b) و نمودار آن مطابق شکل، در بازه ی $[a,c]$ بالای محور x ها و در بازه ی $[c,b]$ زیر محور x ها قرار داشته باشد. $(a<c<b)$



در این صورت $\int_a^b f(x)dx$ برابر با جمع جبری مساحت ها است، به طوری که مساحت بالای محور x ها با علامت مثبت و پایین محور x ها با علامت منفی می باشد.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=S_1-S_2$$

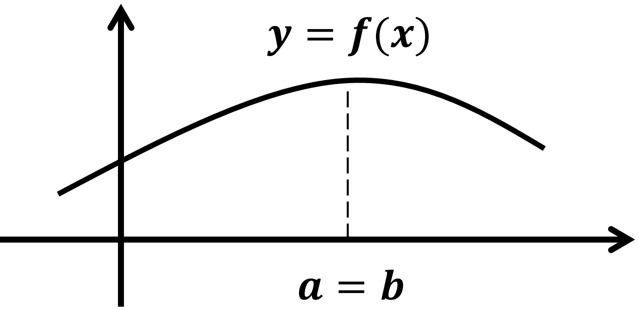
در حالت کلی تر، اگر نمودار تابع پیوسته ی f به صورت زیر باشد، می توان با استفاده از روش بیان شده $\int_a^b f(x)dx$ را به صورت زیر محاسبه کرد.



$$\int_a^b f(x)dx=S_2+S_4-S_1-S_3$$

تذکر۱: مساحت نمی تواند منفی شود، اما حاصل انتگرال معین می تواند منفی باشد.

تذکر۲: حدود انتگرال گیری می توانند با هم برابر باشند$(a=b)$. در این حالت مطابق شکل زیر، مساحت محدود به نمودار $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر صفر می شود و داریم:



$$\int_{a}^{a} f(x)dx = ۰$$

تذکر۳: اگر $c \in (a, b)$ ،می توان بازه ی انتگرال گیری $[a, b]$ را به دو زیربازه ی انتگرال گیری $[a, c]$ و $[c, b]$ تقسیم کرد. به عبارت دیگر داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

تذکر۴: طبق قرارداد داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

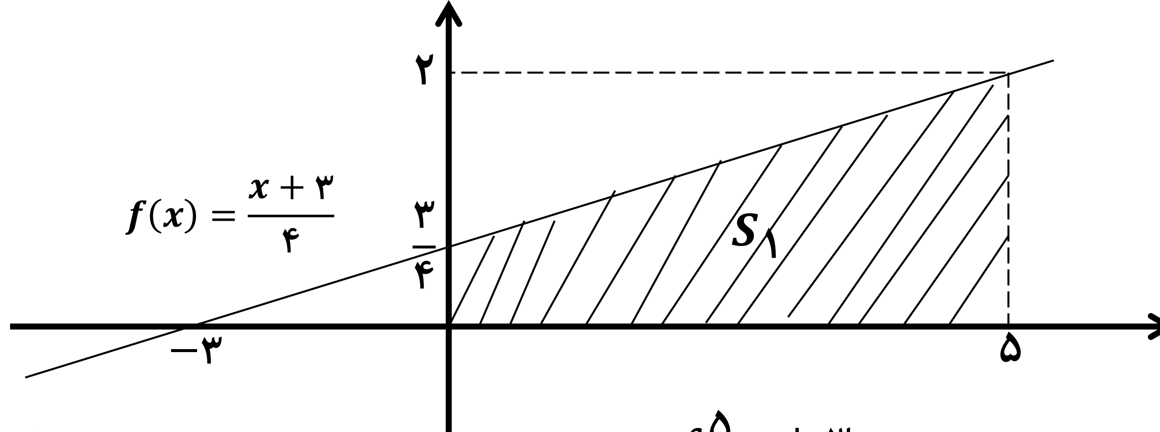
اکنون با ذکر مثال هایی به محاسبه بعضی انتگرال های ساده خطی می پردازیم.

مثال : **مقادیر انتگرال های معین زیر را پیدا کنید.**

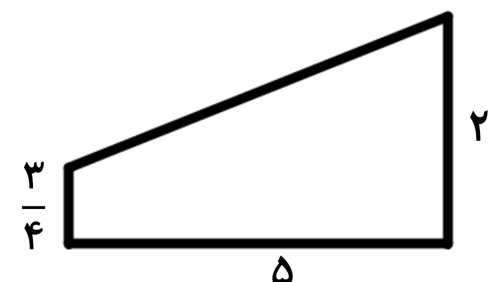
الف) $\int_{۰}^{۵} \frac{x + ۳}{۴} dx$ ب) $\int_{-۵}^{-۳} \frac{x + ۳}{۴} dx$

حل: **برای محاسبه ی انتگرال های داده شده، نمودار تابع $f(x) = \frac{x + ۳}{۴}$ را در بازه های داده شده رسم می کنیم.**

x	۰	-۳
y	$\frac{۳}{۴}$	۰



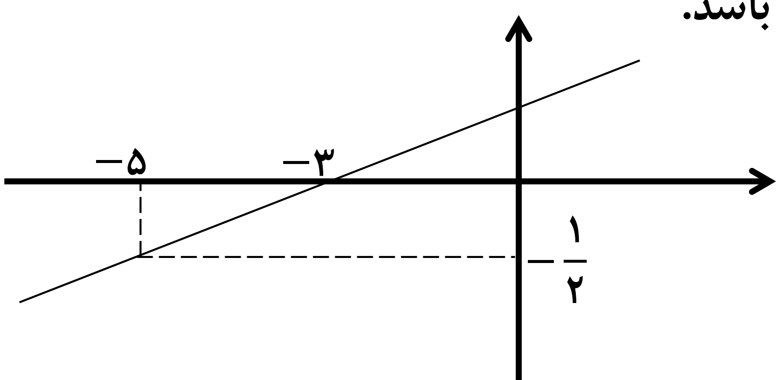
الف) طبق تعریف $\int_{۰}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ **مساحت** ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۳}{۴}$ و محور x ها و خطوط $x=۰$ و $x=۵$ می باشد. قسمت مورد نظر ذوزنقه ای به ابعاد زیر می باشد.

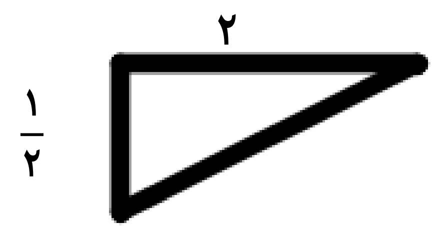


$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{مجموع دو قاعده}}{۲}=\frac{\left(\frac{۳}{۴}+۲\right)\times ۵}{۲}=\frac{\frac{۱۱}{۴}\times ۵}{۲}=\frac{۵۵}{۸}$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx=\frac{۵۵}{۸}$$

ب) طبق تعریف $\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ **قرینه ی مساحت** ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۳}{۴}$ و محور x ها و خطوط $x=-۳$ و $x=-۵$ می باشد. قسمت مورد نظر مثلثی به ابعاد زیر می باشد.





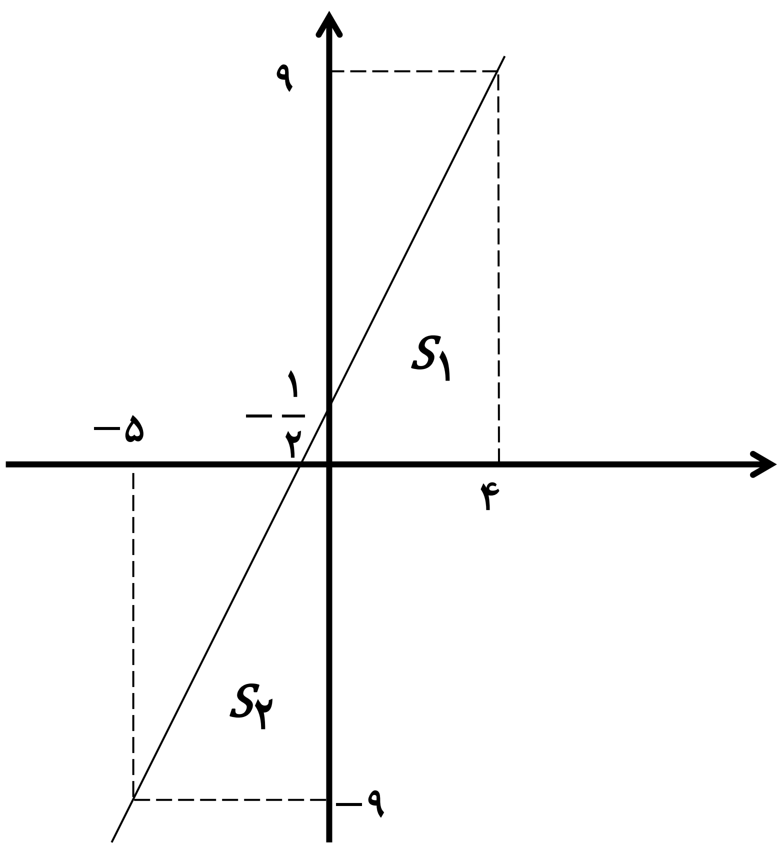
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right) \times ۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \qquad \Rightarrow \int_{-۵}^{-۳} \frac{x + ۳}{۴} dx = -S_{\text{مثلث}} = -\frac{۱}{۲}$$

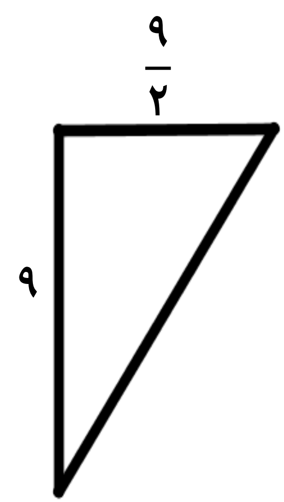
مثال: مقدار $\int_{-۵}^{۴} (۲x + ۱) dx$ محاسبه کنید.

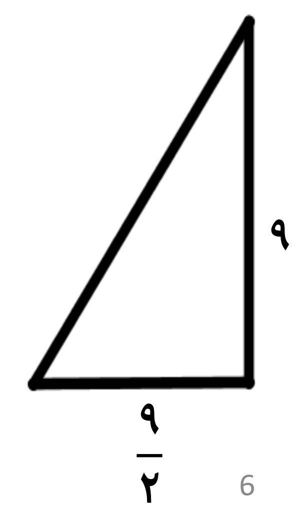
حل: با توجه به نمودار، این تابع در قسمتی از بازه ی انتگرال گیری مقادیر مثبت و در قسمت دیگری از آن مقادیر منفی به خود می گیرد. و می بایست انتگرال مورد نظر را طبق تعریف به مؤلفه های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را جمع (جمع جبری) کنیم.

هم چنین طبق تعریف $\int_{-۵}^{۴} (۲x + ۱) dx$ مجموع **مساحت** ناحیه ی محدود به نمودار تابع $y = ۲x + ۱$ و محور x ها و خطوط $x = -۵$ و $x = ۴$ می باشد.

قسمت مورد نظر دو مثلث و به ابعاد زیر می باشد.







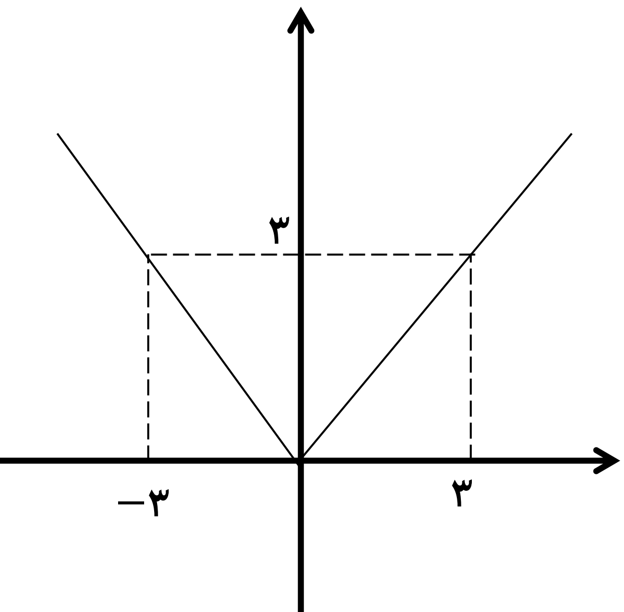
$$S_{1\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{\left(\frac{۹}{۲}\right) \times ۹}{۲} = \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow \int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴} (۲x + ۱)dx = S_{1\text{مثلث}} = \frac{۸۱}{۴}$$

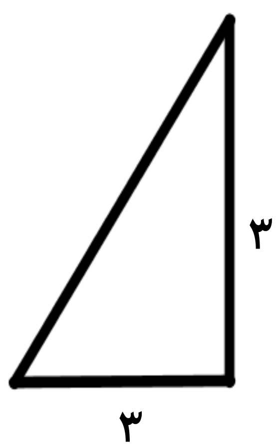
$$S_{2\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{\left(\frac{۹}{۲}\right) \times ۹}{۲} = \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow \int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}} (۲x + ۱)dx = -S_{2\text{مثلث}} = -\frac{۸۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \int_{-۵}^{۴} (۲x + ۱)dx = \int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}} (۲x + ۱)dx + \int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴} (۲x + ۱)dx = S_{1\text{مثلث}} - -S_{2\text{مثلث}} = \frac{۸۱}{۴} - \frac{۸۱}{۴} = ۰$$

مثال: مقدار $\int_{-۳}^{۳} |x|dx$ را محاسبه کنید.

حل: طبق تعریف $\int_{-۳}^{۳} |x|dx$ **مساحت** ناحیه ی محدود به نمودار تابع $y = |x|$ و محور x ها و خطوط $x = -۳$ و $x = ۳$ می باشد. قسمت مورد نظر دو مثلث با ابعاد مساوی زیر می باشد.





$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

$$\int_{-۳}^{۳} |x|dx = \int_{-۳}^{۰} |x|dx + \int_{۰}^{۳} |x|dx = ۲S_{\text{مثلث}} = ۹$$

محاسبه ی انتگرال توابع ناپیوسته (بد رفتار) در بازه ی انتگرال گیری:

فرض کنیم تابع f در نقاط محدود $c_۱, c_۲, \dots, c_n$ از دامنه اش ناپیوسته باشد و این نقاط در بازه ی انتگرال گیری $[a, b]$ قرار داشته باشند.

برای محاسبه ی انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ کافی است بازه ی $[a, b]$ را به زیر بازه های $[a, c_۱], [c_۱, c_۲], \dots, [c_n, b]$ تقسیم کنیم و انتگرال را در هر یک از این زیربازه ها محاسبه کنیم که تابع در تمام نقاط آن زیربازه ها (به جز احتمالا در دو سر زیربازه ها) پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_۱} f(x)dx + \int_{c_۱}^{c_۲} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال معین $\int_{-۳}^{۱}([x] + ۲)dx$.

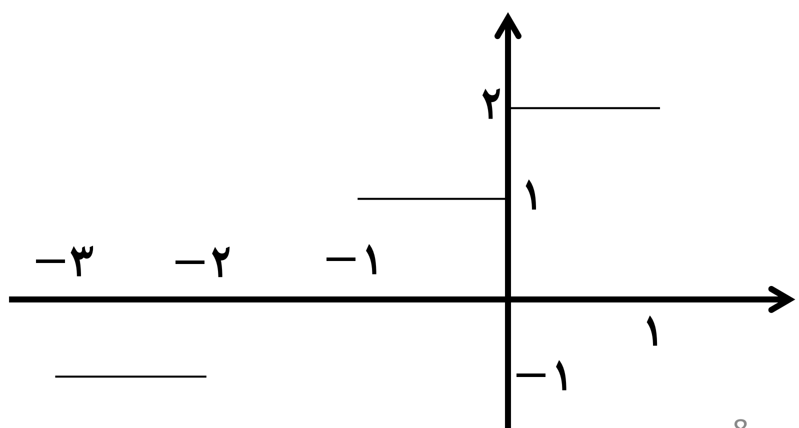
حل: ابتدا نمودار تابع $f(x) = [x] + ۲$ را در بازه ی $[-۴, ۳)$ رسم می کنیم. (توجه کنید که باز یا بسته بودن دو سر بازه تاثیری در محاسبه ی انتگرال ندارد.)

$$-۳ \le x < -۲ \Rightarrow [x] = -۳ \Rightarrow y = -۳ + ۲ = -۱$$

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۲ + ۲ = ۰$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = -۱ + ۲ = ۱$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰ + ۲ = ۲$$



با توجه به نمودار تابع f ، ملاحظه می کنیم که این تابع حالت خاصی از توابع پله ای بوده که در بازه ی انتگرال گیری $[-۴,۳)$ جزء توابع بدرفتار ناپیوسته به حساب می آید.

حال بازه ی انتگرال گیری را به ۴ زیربازه ی $[-۳,-۲), [-۲,-۱), [-۱,۰), [۰,۱)$ تقسیم می کنیم و داریم:

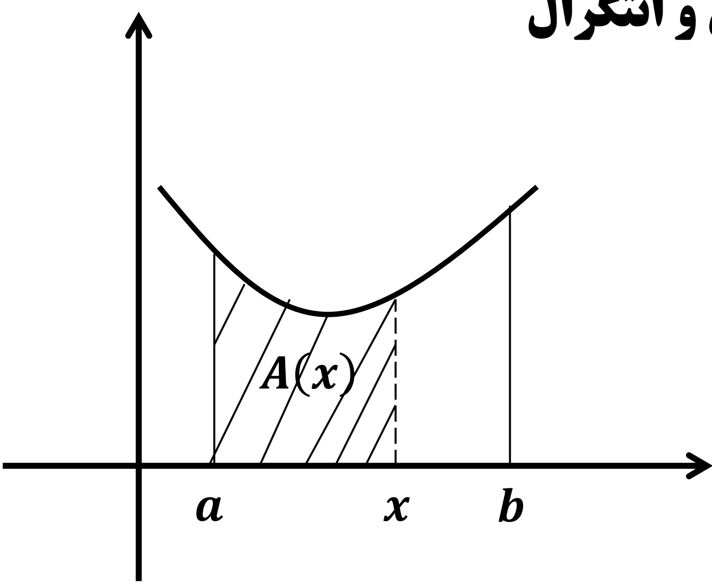
$$\int_{-۳}^{۱}([x]+۲)dx = \int_{-۳}^{-۲}([x]+۲)dx + \int_{-۲}^{-۱}([x]+۲)dx + \int_{-۱}^{۰}([x]+۲)dx + \int_{۰}^{۱}([x]+۲)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-۳}^{۱}([x]+۲)dx = -S_۱ + ۰ + S_۲ + S_۳ = -(۱\times ۱) + ۰ + (۱\times ۱) + (۱\times ۲) = -۱ + ۱ + ۲ = ۲$$

تذکر: توابعی که در بازه ی انتگرال گیری $[a,b]$ دارای مجانب قائم هستند، در این بازه انتگرال پذیر نمی باشند.

به عنوان مثال، انتگرال $\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{x}dx$ تعریف نمی شود. زیرا تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه ی انتگرال گیری $[-۱,۱]$ دارای مجانب قائم $x=۰$ است.

اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال



اگر $y=f(x)$ تابعی پیوسته در بازه ی $[a,b]$ باشد، آن گاه تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$A(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$$

این تابع را **تابع مساحت** می نامیم.

در تعریف مذکور، حد بالای انتگرال گیری یعنی x ، متغیری در بازه ی $[a, b]$ می باشد. لذا تابع مساحت نیز متغیر بوده و مقدار آن وابسته به متغیر x است هم چنین عدد a ثابت است.

حال اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم:

قضیه: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله ی $[a, b]$ باشد و برای هر x متعلق به $[a, b]$ داشته باشیم:

در این صورت $A(x)$ در بازه ی $[a, b]$ مشتق پذیر بوده و داریم:

$$A'(x) = f(x)$$

قضیه ی بالا رابطه ی بین مشتق گیری و انتگرال گیری را مشخص می کند. در حقیقت، انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری می باشد. یعنی هنگامی که می خواهیم انتگرال تابعی مانند f را بیابیم، به دنبال تابعی هستیم (A) که اگر از آن مشتق بگیریم، تابع f به دست آید.

نکته: در انتگرال $A(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$، اگر u تابعی از x باشد، آن گاه مشتق تابع $A(x)$ برابر است با:

$$A'(x) = u'(x).f'(u(x))$$

مثال: اگر $F(x) = \int_۰^x t^۲ e^t\, dt$ آن گاه $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$F'(x) = x^۲ e^x$$

مثال: اگر $F(x) = \int_{۰}^{x} \frac{sint}{t^{۲}+۱}dt$ آن گاه $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$F'(x) = \frac{sinx}{x^{۲}+۱}$$

انتگرال نامعین:

تابع اولیه: تابع اولیه عکس مشتق گیری است. برای محاسبه ی تابع اولیه ی تابعی مانند f کافی است تابعی مانند g بیابیم به طوری که: $\mathrm{g}'(x) = f(x)$

مثال: اگر $f(x) = ۲x$ ، در این صورت $\mathrm{g}(x) = x^{۲}$ یک تابع اولیه برای f می باشد. زیرا:

$$\mathrm{g}'(x) = ۲x = f(x)$$

تابع اولیه ی f را به صورت $\int f(x)dx$ نشان داده و به آن **انتگرال نامعین** یا **تابع اولیه ی عمومی** f می گوییم.

با فرض آن که $F(x)$ تابع اولیه ی تابع پیوسته ی f باشد $(F'(x) = f(x))$ داریم:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

فرمول بالا، بیانگر تمام توابع اولیه ی f است که با اضافه کردن عدد ثابت C به تابع اولیه ی F به دست می آید.

به عنوان مثال، می دانیم $F(x) = sinx$ یک تابع اولیه برای $f(x) = cosx$ است. زیرا:

$$(sinx)' = cosx(F'(x) = f(x))$$

پس با داشتن این تابع اولیه و اضافه کردن اعداد ثابت به آن، می توان بی شمار تابع اولیه ی دیگر برای تابع f پیدا کرد. و در کل می نویسیم:

$$\int cosxdx = sinx + C$$

تذکر: در برخی از مسائل، تابع اولیه ی باید شرایط خاصی داشته باشد، به این شرایط خاص، شرایط اولیه یا داده های اولیه می گوییم. به عنوان مثال، اگر بخواهیم تابع اولیه ای برای تابع $f(x) = cosx$ به دست آوریم که شرط اولیه ی $F\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$ را دارا باشد، با توجه به مثال قبل داریم:

$$F(x) = sinx + C \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۲}} F\left(\frac{\pi}{۲}\right) = sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) + C \xrightarrow{F\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱} ۱ = ۱ + C \Rightarrow C = ۰ \quad \Rightarrow F(x) = sinx$$

خواص خطی انتگرال نامعین

$$۱) \int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$۲) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

فرمول های انتگرال گیری

به کمک فرمول های زیر، می توانیم توابع اولیه ی برخی از توابع مهم را به دست آوریم. برای اثبات این فرمول ها، می توانیم از عبارت سمت راست تساوی ها مشتق گرفته و به عبارت داخل انتگرال ها برسیم.

$$۱) \int kdx = kx + C$$

$$۲) \int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + C$$

$$۳) \int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$۴) \int e^x dx = e^x + C$$

$$۵) \int sinxdx = -cosx + C$$

$$۶) \int cosxdx = sinx + C$$

$$۷)\ \int (۱ + tan^۲ x)dx = tanx + C \qquad ۸)\ \int (۱ + cotg^۲ x)dx = -cotgx + C$$

نکته: اگر در فرمول های بالا، توابع داخل انتگرال بر حسب u باشند (که u تابعی برحسب x است) در این صورت برای استفاده از فرمول های بالا، باید مشتق u برحسب x ($u'(x)$)نیز به صورت عامل ضربی در داخل انتگرال وجود داشته و یا قابل ایجاد باشد. یعنی:

مشتق u به صورت عامل ضربی

$$\int u' f(u)\, dx = \int f(u)(u'dx) = \int f(u)du = F(u)$$

تابعی بر حسب x

مثال: انتگرال $\int ۳(۳x + ۱)^۴ dx$ را در نظر بگیرید. اگر این انتگرال را با فرمول های بیان شده مقایسه کنیم، متوجه خواهیم شد که شبیه فرمول ۲ است. در این صورت با توجه به فرمول بالا داریم:

$$\int ۳(۳x + ۱)^۴ dx \overset{u(x)=۳x+۱ \to u'(x)=۳}{=\!=\!=\!=\!=} \int u'u^۴ dx = \int u^۴\,(u'dx) = \int u^۴ du$$

حال می توانیم از فرمول ۲ استفاده کنیم.

$$\int u^۴ du = \frac{u^{۴+۱}}{۴ + ۱} = \frac{u^۵}{۵} + C \overset{u(x)=۳x+۱}{=\!=\!=\!=} \int ۳(۳x + ۱)^۴ dx = \frac{(۳x + ۱)^۵}{۵} + C$$

تذکر در نکته: اگر $u'(x)$ به صورت عامل ضربی وجود نداشت، در صورت امکان آن را ایجاد می کنیم.

مثال: اگر انتگرال قبل، به صورت $\int (۳x+۱)^۴ dx$ داده شود، با فرض $u(x)=۳x+۱$ داریم: $u'(x)=۳$ که به عنوان عامل ضربی در درون انتگرال وجود ندارد. ولی برای ایجاد آن کافی است عدد ۳ را در عبارت درون انتگرال ضرب و تقسیم کنیم. بنابراین داریم:

$$\int (۳x+۱)^۴ dx = \int \frac{۱}{۳} \times ۳\,(۳x+۱)^۴ dx = \frac{۱}{۳}\int ۳\,(۳x+۱)^۴ dx$$

حال عبارت درون انتگرال مانند مثال قبل شد و داریم:

$$\int (۳x+۱)^۴ dx = \frac{۱}{۳}\int ۳\,(۳x+۱)^۴ dx = \frac{۱}{۳}\int (۳x+۱)^۴\, ۳dx = \frac{۱}{۳}\int u^۴ du = \frac{۱}{۳}\left(\frac{u^۵}{۵}+C\right)$$

$$= \frac{u^۵}{۱۵}+C \xlongequal{u(x)=۳x+۱} \int (۳x+۱)^۴ dx = \frac{(۳x+۱)^۵}{۱۵}+C$$

مثال: مقدار $\int (۵x^۴-۳x^۳+۷x^۲+x-۸)dx$ را حساب کنید.

حل: جمله به جمله انتگرال گیری کرده، ضرایب را بیرون برده و از فرمول $\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}+C$ استفاده می کنیم.

$$\int (۵x^۴-۳x^۳+۷x^۲+x-۸)dx = ۵\int x^۴ dx - ۳\int x^۳ dx + ۷\int x^۲ dx + \int x dx - \int ۸dx$$

$$= ۵\times\frac{x^۵}{۵} - ۳\times\frac{x^۴}{۴} + ۷\times\frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۲}{۲} - ۸x + C = x^۵ - \frac{۳x^۴}{۴} + \frac{۷x^۳}{۳} + \frac{x^۲}{۲} - ۸x + C$$

می توانیم پاسخ خود را با مشتق گیری کنترل و آزمایش کنیم:

$$\left(x^{۵}-\frac{۳x^{۴}}{۴}+\frac{۷x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}-۸x+C\right)'=۵x^{۴}-۳x^{۳}+۷x^{۲}+x-۸$$

مثال: $\int\left(\frac{۴x^{\frac{۲}{۳}}}{۷}-۵\sqrt{x}+\frac{\pi}{۳x^{۲}}\right)dx$ را حساب کنید.

حل: به منظور آسانی در عمل از نماهای کسری برای هر جمله استفاده می کنیم.

$$\int\left(\frac{۴x^{\frac{۲}{۳}}}{۷}-۵\sqrt{x}+\frac{\pi}{۳x^{۲}}\right)dx=\frac{۴}{۷}\int x^{\frac{۲}{۳}}dx-۵\int x^{\frac{۱}{۲}}dx+\frac{\pi}{۳}\int x^{-۲}dx$$

$$=\frac{۴}{۷}\times\frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱}-۵\times\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}+\frac{\pi}{۳}\times\frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱}=\frac{۴}{۷}\times\frac{x^{\frac{۵}{۳}}}{\frac{۵}{۳}}-۵\times\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}+\frac{\pi}{۳}\times\frac{x^{-۱}}{-۱}=\frac{۱۲}{۳۵}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{\pi}{۳x}+C$$

دومین قضیه ی اساسی حساب انتگرال:

قضیه: اگر f در تمام بازه ی $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه ی دلخواه تابع f باشد($F'(x)=f(x)$)، آن گاه:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

مثال: می خواهیم $\int_{\cdot}^{۱} x^{۳}\, dx$ را محاسبه کنیم. تابع $F(x) = \frac{x^{۴}}{۴}$ تابع اولیه ای برای تابع $f(x) = x^{۳}$ می باشد. زیرا:

$$\left(\frac{x^{۴}}{۴}\right)' = ۴ \times \frac{x^{۳}}{۴} = x^{۳} \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

بنابراین با استفاده از دومین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\int_{\cdot}^{۱} x^{۳}\, dx = F(۱) - F(\cdot) \xlongequal{F(x)=\frac{x^{۴}}{۴}} \frac{۱^{۴}}{۴} - \frac{\cdot^{۴}}{۴} = \frac{۱}{۴} - \cdot = \frac{۱}{۴}$$

حال تابع اولیه ی دیگری مانند $G(x) = \frac{x^{۴}}{۴} + ۱$ را برای f در نظر بگیرید. با استفاده از دومین قضیه ی اساسی داریم:

$$\int_{\cdot}^{۱} x^{۳}\, dx = G(۱) - G(\cdot) \xlongequal{G(x)=\frac{x^{۴}}{۴}+۱} \left(\frac{۱^{۴}}{۴} + ۱\right) - \left(\frac{\cdot^{۴}}{۴} + ۱\right) = \frac{۱}{۴} + ۱ - ۱ = \frac{۱}{۴}$$

می بینیم؛ عدد ۱ در محاسبات حذف شده و جواب انتگرال مجددا برابر $\frac{۱}{۴}$ می باشد. به طور کلی اگر به جای عدد ثابت ۱ در تابع اولیه ی $G(x) = \frac{x^{۴}}{۴} + ۱$ هر عدد ثابت دیگری مانند C قرار دهیم: $\left(G(x) = \frac{x^{۴}}{۴} + C\right)$ عدد C در محاسبات حذف شده و تاثیری در جواب انتگرال معین ندارد. زیرا:

$$\int_{\cdot}^{۱} x^{۳}\, dx = G(۱) - G(\cdot) \xlongequal{G(x)=\frac{x^{۴}}{۴}+C} \left(\frac{۱^{۴}}{۴} + C\right) - \left(\frac{\cdot^{۴}}{۴} + C\right) = \frac{۱}{۴} + C - C = \frac{۱}{۴}$$

نکته ی ۱) عبارت $F(b)-F(a)$ معمولا با نماد $F(x)\Big|_{a}^{b}$ نیز نمایش داده می شود.

نکته ی ۲) کاربردهای نماد $\int$ به صورت زیر می باشد:

الف) اگر این نماد، بدون حدود انتگرال گیری (یعنی به صورت $\int f(x)dx$) به کار رود، منظور از آن، انتگرال نامعین یا همان تابع اولیه ی عمومی f بوده و بیانگر بی شمار توابعی می باشد که اختلاف آن ها در یک عدد ثابت، مانند C است.

ب) اگر این نماد، با حدود انتگرال گیری (یعنی به صورت $\int_a^b f(x)dx$) به کار رود، منظور از آن، انتگرال معین بوده که حاصل آن عددی است حقیقی که برابر مساحت (یا قرینه ی مساحت) محصور به نمودار تابع $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است.

مثال: $\int (۴x-۳)dx$ و $\int_۱^۲ (۴x-۳)dx$ را حساب کنید.

حل:

طبق اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\int (۴x-۳)dx = ۴\times\frac{x^۲}{۲}-۳x = ۲x^۲-۳x$$

طبق دومین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\int_۱^۲ (۴x-۳)dx = ۲x^۲-۳x\Big|_۱^۲ = \left[۲(۲)^۲-۳(۲)\right]-\left[۲(۱)^۲-۳(۱)\right]=[۸-۶]-[۲-۳]=۳$$

انتگرال معین توابع دارای قدر مطلق:

برای محاسبه ی انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ که در آن $f(x)$ تابعی قدرمطلقی می باشد، ابتدا ریشه ی عبارت داخل قدر مطلق را به دست می آوریم. سپس با توجه به ریشه ی به دست آمده، حدود انتگرال گیری را تفکیک کرده و در هر انتگرال با توجه به بازه ی انتگرال گیری، با مشخص کردن علامت عبارات درون قدرمطلق، قدرمطلق را برداشته و در آخر از عبارت به دست آمده انتگرال گیری می کنیم.

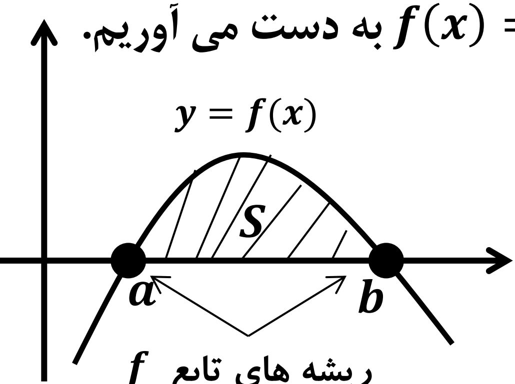
مثال:

$$\int_{-۱}^{۱}|x|dx=\int_{-۱}^{۰}-xdx+\int_{۰}^{۱}xdx=-\frac{x^۲}{۲}\bigg|_{-۱}^{۰}+\frac{x^۲}{۲}\bigg|_{۰}^{۱}=\left[-\frac{۰^۲}{۲}-\left(-\frac{(-۱)^۲}{۲}\right)\right]+\left[\frac{۰^۲}{۲}-\left(-\frac{(-۱)^۲}{۲}\right)\right]$$

$$=\left[۰+\frac{۱}{۲}\right]+\left[۰+\frac{۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

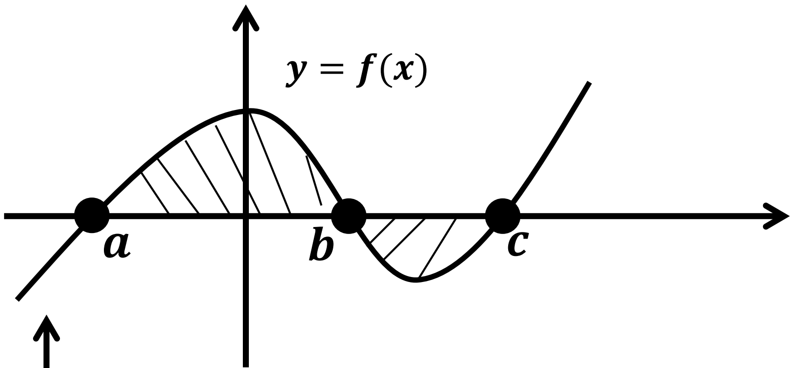
مساحت ناحیه ی محدود به منحنی تابع f و محور x ها

در این حالت ابتدا محل برخورد منحنی تابع با محور x ها را از طریق حل معادله ی $f(x)=۰$ به دست می آوریم.
این نقاط در حقیقت همان حدود انتگرال گیری می باشند. پس داریم:



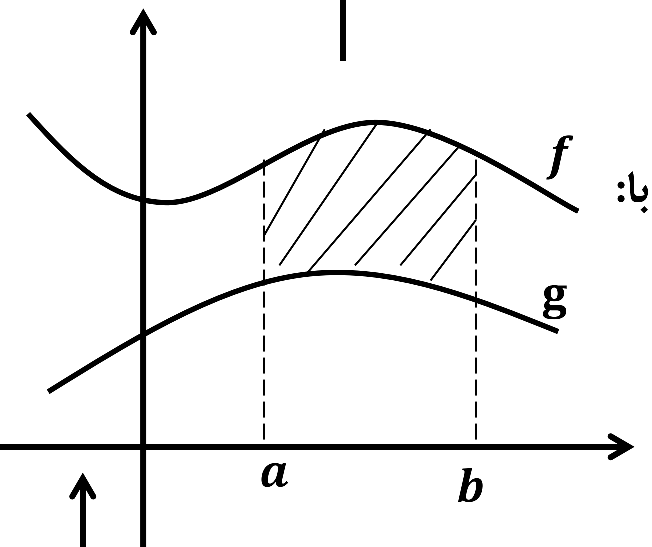
$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

تذکر: اگر جواب های معادله ی $f(x)=0$ برابر a, b و c باشند (با فرض $a<b<c$) مساحت محصور را می توان از فرمول زیر به دست آورد:



$$S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

مساحت ناحیه ی محدود به دو منحنی:

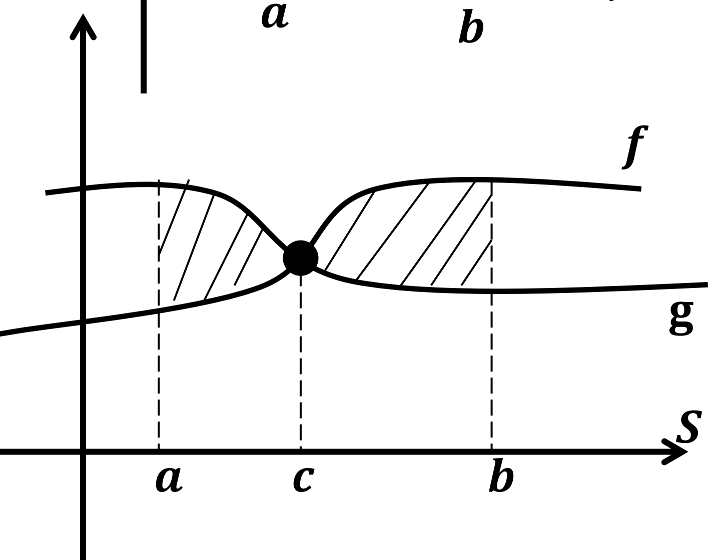


الف) اگر نمودارهای f و g در بازه ی $[a,b]$ به صورت زیر باشند،
آن گاه سطح محصور بین این دو منحنی و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با:

$$S=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

قدر مطلق

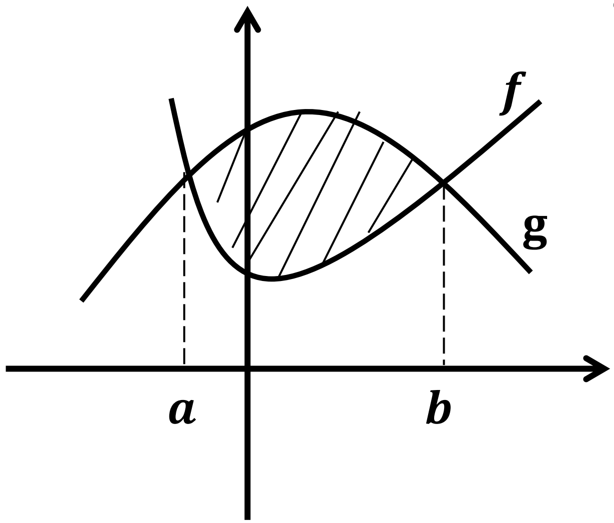
به عبارت دیگر معادله ی $f(x)=g(x)$ در بازه ی $[a,b]$ جواب ندارد.



ب) اگر نمودارهای f و g در بازه ی $[a,b]$ به صورت زیر باشند،
آن گاه سطح محصور بین این دو منحنی و خطوط $x=a$ و $x=b$
برابر است با:

$$S=\left|\int_a^c [f(x)-g(x)]dx\right|+\left|\int_c^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

ج) برای محاسبه ی مساحت ناحیه ی محدود به منحنی های دو تابع f و g ، ابتدا معادله ی $f(x) = g(x)$ را حل کرده و جواب های این معادله (محل های تقاطع منحنی های f و g) را می یابیم. فرض کنیم جواب های معادله ی بالا برابر a و b بوده و نمودار آن ها به صورت زیر باشد. در این صورت مساحت S برابر است با:



$$S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال های نامعین زیر:

$$۱)\ \int \sqrt{۱۷}dx = \sqrt{۱۷}x + C \qquad ۲)\ \int[sin^۲x + cos^۲x]dx = \int ۱ \times dx = x$$

$$۳)\ \int \frac{۲}{x^۴}dx = \int ۲ \times \frac{۱}{x^۴}dx = ۲\int x^{-۴}dx = ۲ \times \frac{x^{-۴+۱}}{-۴+۱} = ۲ \times \frac{x^{-۳}}{-۳} = -\frac{۲}{۳x^۳}$$

$$۴)\ \int \frac{x^۳ - x^{-۳}}{۳}dx = \int \frac{x^۳}{۳}dx - \int \frac{x^{-۳}}{۳}dx = \frac{۱}{۳}\left(\frac{x^{۳+۱}}{۳+۱}\right) - \frac{۱}{۳}\left(\frac{x^{-۳+۱}}{-۳+۱}\right) = \frac{۱}{۳} \times \frac{x^۴}{۴} - \frac{۱}{۳} \times \frac{x^{-۲}}{-۲}$$

$$= \frac{x^۴}{۱۲} + \frac{۱}{۶x^۲}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال معین های زیر:

$$۱)\ \int_{۴}^{۹}\sqrt{x}dx=\int_{۴}^{۹}x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}\Bigg|_{۴}^{۹}=\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\Bigg|_{۴}^{۹}=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}}\Bigg|_{۴}^{۹}=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\Bigg|_{۴}^{۹}=\frac{۲}{۳}(۲۷-۸)=\frac{۲}{۳}(۱۹)=\frac{۳۸}{۳}$$

$$۲)\ \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(۵sinx-۳cosx)dx\ =۵\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}sinxdx-۳\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}cosxdx=۵(-cosx)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}-۳(sinx)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}$$

$$=-۵\left[cos\pi-cos\frac{\pi}{۲}\right]-۳\left[sin\pi-sin\frac{\pi}{۲}\right]=-۵[-۱-۰]-۳[۰-۱]=۵+۳=۸$$

$$۳)\ \int_{۰}^{۱}e^{۲x}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۲}\times ۲e^{۲x}dx=\frac{۱}{۲}\times\int_{۰}^{۱}e^{۲x}(۲dx)\xlongequal{u=۲x\Rightarrow du=۲dx}\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}e^{u}du=\frac{۱}{۲}e^{u}\Bigg|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\Bigg|_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(e^{۲}-e^{۰}\right)=\frac{۱}{۲}\left(e^{۲}-۱\right)$$

$$۴)\ \int_{۱}^{۵}\frac{dx}{x}=\ln x\Bigg|_{۱}^{۵}=\ln ۵-\ln ۱=\ln ۵-۰=\ln ۵$$

$$۵)\ \int_{۱}^{۵}\frac{xdx}{x^{۲}+۱}=\frac{۱}{۲}\times\int_{۱}^{۵}\frac{۲xdx}{x^{۲}+۱}\xlongequal{u=x^{۲}+۱\Rightarrow du=۲xdx}\frac{۱}{۲}\times\int_{۱}^{۵}\frac{du}{u}=\frac{۱}{۲}\ln u\Bigg|_{۱}^{۵}=\frac{۱}{۲}\ln\left(x^{۲}+۱\right)\Bigg|_{۱}^{۵}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\ln ۲۶-\ln ۲)=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۲۶}{۲}=\frac{۱}{۲}\ln ۱۳=\ln\sqrt{۱۳}$$